# AST

## Analyse Statique pour l’optimisation de programmes

David Pichardie

31 janvier 2020

# Analyse de programme

Objectif : déduire de façon automatisée des propriétés relatives à l'exécution d'un programme, sans exécuter le programme.

Application : compilation, optimisation de code, vérification de programme, debugging...

3 règles :

1. L'analyseur doit terminer.
2. Les informations calculées doivent être correctes.
3. L'analyseur peut renvoyer une description approchée du comportement du programme.

# Statique vs. dynamique

Analyse statique

- Calculs effectués à la compilation
- Caractérise toutes les exécutions
- Conservative

Analyse dynamique

- Induit un surcoût à l'exécution
- Caractérise une ou quelques exécutions
- Précise
- Ne peut pas faire de prédictions

Remarque : les JIT utilisent des informations dynamiques pendant leurs analyses statiques d'optimisation de programme !

# Rappel : équations de l'analyse de durée de vie (*liveness*)

Les équations qui définissent l'analyse sont :

$$\begin{array}{rcl} L_{\mathsf{out}}(n) & = & \bigcup\limits_{n \to n'} L_{\mathsf{in}}(n') \\ L_{\mathsf{in}}(n) & = & (L_{\mathsf{out}}(n) - \mathsf{kill}(n)) \cup \mathsf{gen}(n) \end{array}$$

*Toute* solution de ces inéquations est sûre, mais plusieurs solutions peuvent exister.

La *plus petite* solution donne les meilleurs résultats. Mais comment *ordonner* les solutions ?

# Ordonner les solutions

On utilise un ordre *partiel* qui utilise l'inclusion ensembliste composantes par composantes

$$(\mathrm{L}_{\mathrm{in}}(1), \mathrm{L}_{\mathrm{out}}(1), \mathrm{L}_{\mathrm{in}}(2), \mathrm{L}_{\mathrm{out}}(2)) \sqsubseteq \left(\mathrm{L}'_{\mathrm{in}}(1), \mathrm{L}'_{\mathrm{out}}(1), \mathrm{L}'_{\mathrm{in}}(2), \mathrm{L}'_{\mathrm{out}}(2)\right)$$

ssi

$$\mathrm{L}_{\mathrm{in}}(1) \subseteq \mathrm{L}'_{\mathrm{in}}(1) \wedge \mathrm{L}_{\mathrm{out}}(1) \subseteq \mathrm{L}'_{\mathrm{out}}(1) \wedge \mathrm{L}_{\mathrm{in}}(2) \subseteq \mathrm{L}'_{\mathrm{in}}(2) \wedge \mathrm{L}_{\mathrm{out}}(2) \subseteq \mathrm{L}'_{\mathrm{out}}(2)$$

Cet ordre modélise bien la *précision* de notre analyse

$$\vec{\mathrm{L}} \subseteq \vec{\mathrm{L}}' \text{ ssi } \vec{\mathrm{L}} \text{ donne une réponse plus précise que } \vec{\mathrm{L}}'$$

# Analyse de flot de données

L'analyse de durée de vie est membre de la famille des *analyses de flot de données*. Ces analyses associent une *propriété* à chaque point du code.

En général, les propriétés sont *ordonnées ;* un système *d'équations* définit un ensemble de solutions *sûres ;* parmi les solutions sûres, la *plus précise* est celle recherchée.

On associe ensuite un *ordre partiel* à l'espace des solutions et on exprime la plus précise solution comme *la plus petite ou la plus grande* pour cette ordre.

# Structure commune aux différentes analyses

Deux parties :

1. À partir d'un programme RTL, produire un système d'équations
   - Toute solution de ce système doit être correcte par rapport au comportement dynamique du programme.
2. Résoudre le système d'équations
   - Itérations par *point fixe* (sur des structures de *treillis*)

# Exemples

Voici un échantillon des propriétés étudiées dans la littérature :

- **quelles variables seront *potentiellement utilisées* ?**
- quelles variables ont *une valeur connue* et laquelle ?
- quelles variables ont une valeur *appartenant à un intervalle connu* et lequel ?
- quelles sont les *relations affines connues* entre variables ?
- quelles variables sont *certainement égales ?*
- quelles variables sont *potentiellement égales ?*
- quelles expressions *seront certainement évaluées ?*
- quels points du code *ont certainement été atteints* auparavant ?
- **une définition peut-elle *atteindre un point de programme* ?**
- **quelles expressions ont *déjà été évaluées* ?**

1. Analyse des définitions possibles

Analyse des expressions disponibles

# Analyse des définitions possibles

Déterminer l'ensemble des définitions (affectations) qui peuvent ( may ) atteindre un point de programme

Exemple (factorielle) :

```
1. y = x;
2. z = 1;
3. while (1 < y) {
4.     z = z * y;
5.     y = y - 1;
   }
6. y = 0;
7. return z;
```

Au point de programme 4, les définitions données en 1, 2, 4 et 5 sont possibles (ce n'est pas le cas de la définition en 6).

# Analyse des définitions possibles

Une définition est représentée par un couple $(v, l) \in \mathit{Var} \times \mathit{Lab}^{\mathbf{?}}$ avec $\mathit{Lab}^{\mathbf{?}} = \mathit{Lab} \cup \{\mathbf{?}\}$.

$(v, l)$ : la variable $v$ a été définie au point de programme $l$ et n'a pas été modifiée depuis

$(v, \mathbf{?})$ : la variable $v$ n'est pas initialisée

Calcul de deux ensembles en chaque point de programme $l$ :

$DP_{\text{in}}(l)$ = les définitions entrant dans $l$ (*i.e.*, possibles)

$DP_{\text{out}}(l)$ = les définitions sortant de $l$ (ensemble auxiliaire)

Chaque instruction définit des relations entre ces ensembles.

# Exemple

```
1. y = x;
2. z = 1;
3. while (1 < y) {
4.     z = z * y;
5.     y = y - 1;
   }
6. y = 0
```

# Exemple en RTL (ExDP.rtl)

```
entry:
  y = num
  z = 1
  goto w0_test
w0_test:
  t.0 = Lt(1 y)
  if t.0 goto w0_body else w0_end
w0_body:
  z = Mul(z y)
  y = Sub(y 1)
  goto w0_test
w0_end:
  y = 0
```

Nous allons un peu simplifier le graphe de flot de contrôle dans la suite, pour ne garder que 6 noeuds.

# Analyse des définitions possibles : équations (1)

Une affectation

- tue toutes les définitions précédentes de la variable affectée,
- et génère une nouvelle définition au point courant

$$
\begin{aligned}
DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{1}) &= DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{1}) - \{(\mathbf{y}, \mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in \boldsymbol{Lab}^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y}, \mathbf{1})\} \\
DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{2}) &= DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{2}) - \{(\mathbf{z}, \mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in \boldsymbol{Lab}^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{z}, \mathbf{2})\} \\
DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{3}) &= DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{3}) \\
DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{4}) &= DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{4}) - \{(\mathbf{z}, \mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in \boldsymbol{Lab}^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{z}, \mathbf{4})\} \\
DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{5}) &= DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{5}) - \{(\mathbf{y}, \mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in \boldsymbol{Lab}^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y}, \mathbf{5})\} \\
DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{6}) &= DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{6}) - \{(\mathbf{y}, \mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in \boldsymbol{Lab}^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y}, \mathbf{6})\}
\end{aligned}
$$

# Analyse des définitions possibles : équations (2)

Les définitions qui sont possibles après une instruction le sont également avant toute prochaine instruction.

Au point initial, aucune variable n'est initialisée (à adapter pour les paramètres des fonctions).

$$
\begin{aligned}
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{1}) &= \{(v, \mathbf{?}) \mid v \in Var\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{2}) &= DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{1}) \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{3}) &= DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{2}) \cup DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{5}) \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{4}) &= DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{3}) \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{5}) &= DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{4}) \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{6}) &= DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{3})
\end{aligned}
$$

# Analyse des définitions possibles : une solution

$$
\begin{aligned}
DP_{\text{in}}(\mathbf{1}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{?}),(z,\mathbf{?})\}\\
DP_{\text{in}}(\mathbf{2}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(z,\mathbf{?})\}\\
DP_{\text{in}}(\mathbf{3}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\}\\
DP_{\text{in}}(\mathbf{4}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\}\\
DP_{\text{in}}(\mathbf{5}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{4})\}\\
DP_{\text{in}}(\mathbf{6}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\}\\
DP_{\text{out}}(\mathbf{1}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(z,\mathbf{?})\}\\
DP_{\text{out}}(\mathbf{2}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(z,\mathbf{2})\}\\
DP_{\text{out}}(\mathbf{3}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\}\\
DP_{\text{out}}(\mathbf{4}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{4})\}\\
DP_{\text{out}}(\mathbf{5}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{4})\}\\
DP_{\text{out}}(\mathbf{6}) &= \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{6}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\}
\end{aligned}
$$

Nous observons que $(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}) \in DP_{\text{in}}(\mathbf{6})$.

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

$$
\begin{array}{llll}
DP_{\text{in}}(\mathbf{1}) = \{(v, \mathbf{?}) \mid v \in Var\} & (e_1) & DP_{\text{out}}(\mathbf{1}) = DP_{\text{in}}(\mathbf{1}) - \{(\mathbf{y}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y}, \mathbf{1})\} & (s_1) \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{2}) = DP_{\text{out}}(\mathbf{1}) & (e_2) & DP_{\text{out}}(\mathbf{2}) = DP_{\text{in}}(\mathbf{2}) - \{(\mathbf{z}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{z}, \mathbf{2})\} & (s_2) \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{3}) = DP_{\text{out}}(\mathbf{2}) \cup DP_{\text{out}}(\mathbf{5}) & (e_3) & DP_{\text{out}}(\mathbf{3}) = DP_{\text{in}}(\mathbf{3}) & (s_3) \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{4}) = DP_{\text{out}}(\mathbf{3}) & (e_4) & DP_{\text{out}}(\mathbf{4}) = DP_{\text{in}}(\mathbf{4}) - \{(\mathbf{z}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{z}, \mathbf{4})\} & (s_4) \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{5}) = DP_{\text{out}}(\mathbf{4}) & (e_5) & DP_{\text{out}}(\mathbf{5}) = DP_{\text{in}}(\mathbf{5}) - \{(\mathbf{y}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y}, \mathbf{5})\} & (s_5) \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{6}) = DP_{\text{out}}(\mathbf{3}) & (e_6) & DP_{\text{out}}(\mathbf{6}) = DP_{\text{in}}(\mathbf{6}) - \{(\mathbf{y}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y}, \mathbf{6})\} & (s_6)
\end{array}
$$

Itération 0 : $\vec{\emptyset}$

$$
\begin{array}{llll}
DP_{\text{in}}(\mathbf{1}) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(\mathbf{1}) = & \emptyset \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{2}) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(\mathbf{2}) = & \emptyset \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{3}) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(\mathbf{3}) = & \emptyset \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{4}) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(\mathbf{4}) = & \emptyset \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{5}) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(\mathbf{5}) = & \emptyset \\
DP_{\text{in}}(\mathbf{6}) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(\mathbf{6}) = & \emptyset
\end{array}
$$

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

$$
\begin{array}{lll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(v, ?) \mid v \in Var\} & (e_1) & DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 1)\} \; (s_1) \\
DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1) & (e_2) & DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z, 2)\} \; (s_2) \\
DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5) & (e_3) & DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3) \; (s_3) \\
DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3) & (e_4) & DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z, 4)\} \; (s_4) \\
DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4) & (e_5) & DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 5)\} \; (s_5) \\
DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3) & (e_6) & DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 6)\} \; (s_6)
\end{array}
$$

Itération 1 : $\mathrm{F}(\vec{\emptyset})$

$$
\begin{array}{llll}
DP_{\text{in}}(1) = & \{(x, ?), (y, ?), (z, ?)\} & DP_{\text{out}}(1) = & \{(y, 1)\} \\
DP_{\text{in}}(2) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(2) = & \{(z, 2)\} \\
DP_{\text{in}}(3) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(3) = & \emptyset \\
DP_{\text{in}}(4) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(4) = & \{(z, 4)\} \\
DP_{\text{in}}(5) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(5) = & \{(y, 5)\} \\
DP_{\text{in}}(6) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(6) = & \{(y, 6)\}
\end{array}
$$

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

$$\begin{array}{lrlr}
DP_{\text{in}}(1) = \{(v,?) \mid v \in Var\} & (e_1) & DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,1)\} & (s_1) \\
DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1) & (e_2) & DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,2)\} & (s_2) \\
DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5) & (e_3) & DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3) & (s_3) \\
DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3) & (e_4) & DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,4)\} & (s_4) \\
DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4) & (e_5) & DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,5)\} & (s_5) \\
DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3) & (e_6) & DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,6)\} & (s_6)
\end{array}$$

Itération 2 : $\mathrm{F}^2(\vec{\emptyset})$

$$\begin{array}{lclc}
DP_{\text{in}}(1) = & \{(x,?),(y,?),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(1) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} \\
DP_{\text{in}}(2) = & \{(y,1)\} & DP_{\text{out}}(2) = & \{(z,2)\} \\
DP_{\text{in}}(3) = & \{(y,5),(z,2)\} & DP_{\text{out}}(3) = & \emptyset \\
DP_{\text{in}}(4) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(4) = & \{(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(5) = & \{(z,4)\} & DP_{\text{out}}(5) = & \{(y,5)\} \\
DP_{\text{in}}(6) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(6) = & \{(y,6)\}
\end{array}$$

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

$$
\begin{array}{lll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(v,?) \mid v \in Var\} & (e_1) & DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,1)\} \; (s_1) \\
DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1) & (e_2) & DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,2)\} \; (s_2) \\
DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5) & (e_3) & DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3) \; (s_3) \\
DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3) & (e_4) & DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,4)\} \; (s_4) \\
DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4) & (e_5) & DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,5)\} \; (s_5) \\
DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3) & (e_6) & DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,6)\} \; (s_6)
\end{array}
$$

Itération 3 : $\mathrm{F}^3(\vec{\emptyset})$

$$
\begin{array}{llll}
DP_{\text{in}}(1) = & \{(x,?),(y,?),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(1) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} \\
DP_{\text{in}}(2) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(2) = & \{(y,1),(z,2)\} \\
DP_{\text{in}}(3) = & \{(y,5),(z,2)\} & DP_{\text{out}}(3) = & \{(y,5),(z,2)\} \\
DP_{\text{in}}(4) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(4) = & \{(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(5) = & \{(z,4)\} & DP_{\text{out}}(5) = & \{(y,5),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(6) = & \emptyset & DP_{\text{out}}(6) = & \{(y,6)\}
\end{array}
$$

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

$$
\begin{array}{llll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(v,?) \mid v \in Var\} & (e_1) & DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,1)\} & (s_1) \\
DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1) & (e_2) & DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,2)\} & (s_2) \\
DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5) & (e_3) & DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3) & (s_3) \\
DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3) & (e_4) & DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,4)\} & (s_4) \\
DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4) & (e_5) & DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,5)\} & (s_5) \\
DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3) & (e_6) & DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,6)\} & (s_6)
\end{array}
$$

Itération 4 : $\mathrm{F}^4(\vec{\emptyset})$

$$
\begin{array}{llll}
DP_{\text{in}}(1) = & \{(x,?),(y,?),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(1) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} \\
DP_{\text{in}}(2) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(2) = & \{(x,?),(y,1),(z,2)\} \\
DP_{\text{in}}(3) = & \{(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(3) = & \{(y,5),(z,2)\} \\
DP_{\text{in}}(4) = & \{(y,5),(z,2)\} & DP_{\text{out}}(4) = & \{(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(5) = & \{(z,4)\} & DP_{\text{out}}(5) = & \{(y,5),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(6) = & \{(y,5),(z,2)\} & DP_{\text{out}}(6) = & \{(y,6)\}
\end{array}
$$

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

$$
\begin{array}{lll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(v,?) \mid v \in Var\} & (e_1) & DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,1)\} \; (s_1) \\
DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1) & (e_2) & DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,2)\} \; (s_2) \\
DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5) & (e_3) & DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3) \; (s_3) \\
DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3) & (e_4) & DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,4)\} \; (s_4) \\
DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4) & (e_5) & DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,5)\} \; (s_5) \\
DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3) & (e_6) & DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,6)\} \; (s_6)
\end{array}
$$

Itération 5 : $\mathrm{F}^5(\vec{\emptyset})$

$$
\begin{array}{ll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(x,?),(y,?),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(1) = \{(x,?),(y,1),(z,?)\} \\
DP_{\text{in}}(2) = \{(x,?),(y,1),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(2) = \{(x,?),(y,1),(z,2)\} \\
DP_{\text{in}}(3) = \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(3) = \{(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(4) = \{(y,5),(z,2)\} & DP_{\text{out}}(4) = \{(y,5),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(5) = \{(z,4)\} & DP_{\text{out}}(5) = \{(y,5),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(6) = \{(y,5),(z,2)\} & DP_{\text{out}}(6) = \{(y,6),(z,2)\}
\end{array}
$$

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = F(\vec{DP})$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $DP_{\text{in}}(1) = \{(v, ?) \mid v \in Var\}$ | $(e_1)$ | $DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 1)\}$ | $(s_1)$ |
| $DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1)$ | $(e_2)$ | $DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z, 2)\}$ | $(s_2)$ |
| $DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5)$ | $(e_3)$ | $DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3)$ | $(s_3)$ |
| $DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3)$ | $(e_4)$ | $DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z, 4)\}$ | $(s_4)$ |
| $DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4)$ | $(e_5)$ | $DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 5)\}$ | $(s_5)$ |
| $DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3)$ | $(e_6)$ | $DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 6)\}$ | $(s_6)$ |

Itération 6 : $F^6(\vec{\emptyset})$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $DP_{\text{in}}(1) =$ | $\{(x, ?), (y, ?), (z, ?)\}$ | $DP_{\text{out}}(1) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (z, ?)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(2) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (z, ?)\}$ | $DP_{\text{out}}(2) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (z, 2)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(3) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\}$ | $DP_{\text{out}}(3) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(4) =$ | $\{(y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\}$ | $DP_{\text{out}}(4) =$ | $\{(y, 5), (z, 4)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(5) =$ | $\{(y, 5), (z, 4)\}$ | $DP_{\text{out}}(5) =$ | $\{(y, 5), (z, 4)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(6) =$ | $\{(y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\}$ | $DP_{\text{out}}(6) =$ | $\{(y, 6), (z, 2)\}$ |

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

$$
\begin{array}{ll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(v,?) \mid v \in Var\} \quad (e_1) & DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,1)\} \quad (s_1) \\
DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1) \quad (e_2) & DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,2)\} \quad (s_2) \\
DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5) \quad (e_3) & DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3) \quad (s_3) \\
DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3) \quad (e_4) & DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,4)\} \quad (s_4) \\
DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4) \quad (e_5) & DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,5)\} \quad (s_5) \\
DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3) \quad (e_6) & DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,6)\} \quad (s_6)
\end{array}
$$

Itération 7 : $\mathrm{F}^7(\vec{\emptyset})$

$$
\begin{array}{llll}
DP_{\text{in}}(1) = & \{(x,?),(y,?),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(1) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} \\
DP_{\text{in}}(2) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(2) = & \{(x,?),(y,1),(z,2)\} \\
DP_{\text{in}}(3) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(3) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(4) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(4) = & \{(y,1),(y,5),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(5) = & \{(y,5),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(5) = & \{(y,5),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(6) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(6) = & \{(y,6),(z,2),(z,4)\}
\end{array}
$$

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

$$
\begin{array}{ll@{\qquad}ll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(v,?) \mid v \in Var\} & (e_1) & DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,1)\} & (s_1)\\
DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1) & (e_2) & DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,2)\} & (s_2)\\
DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5) & (e_3) & DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3) & (s_3)\\
DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3) & (e_4) & DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,4)\} & (s_4)\\
DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4) & (e_5) & DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,5)\} & (s_5)\\
DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3) & (e_6) & DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,6)\} & (s_6)
\end{array}
$$

Itération 8 : $\mathrm{F}^8(\vec{\emptyset})$

$$
\begin{array}{ll@{\qquad}ll}
DP_{\text{in}}(1) = & \{(x,?),(y,?),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(1) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\}\\
DP_{\text{in}}(2) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(2) = & \{(x,?),(y,1),(z,2)\}\\
DP_{\text{in}}(3) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(3) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\}\\
DP_{\text{in}}(4) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(4) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,4)\}\\
DP_{\text{in}}(5) = & \{(y,1),(y,5),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(5) = & \{(y,5),(z,4)\}\\
DP_{\text{in}}(6) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(6) = & \{(x,?),(y,6),(z,2),(z,4)\}
\end{array}
$$

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $DP_{\text{in}}(1) = \{(v, ?) \mid v \in Var\}$ | $(e_1)$ | $DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 1)\}$ | $(s_1)$ |
| $DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1)$ | $(e_2)$ | $DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z, 2)\}$ | $(s_2)$ |
| $DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5)$ | $(e_3)$ | $DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3)$ | $(s_3)$ |
| $DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3)$ | $(e_4)$ | $DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z, 4)\}$ | $(s_4)$ |
| $DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4)$ | $(e_5)$ | $DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 5)\}$ | $(s_5)$ |
| $DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3)$ | $(e_6)$ | $DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 6)\}$ | $(s_6)$ |

Itération 9 : $\mathrm{F}^9(\vec{\emptyset})$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $DP_{\text{in}}(1) =$ | $\{(x, ?), (y, ?), (z, ?)\}$ | $DP_{\text{out}}(1) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (z, ?)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(2) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (z, ?)\}$ | $DP_{\text{out}}(2) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (z, 2)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(3) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\}$ | $DP_{\text{out}}(3) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(4) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\}$ | $DP_{\text{out}}(4) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 4)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(5) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 4)\}$ | $DP_{\text{out}}(5) =$ | $\{(y, 5), (z, 4)\}$ |
| $DP_{\text{in}}(6) =$ | $\{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\}$ | $DP_{\text{out}}(6) =$ | $\{(x, ?), (y, 6), (z, 2), (z, 4)\}$ |

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathrm{F}(\vec{DP})$

$$
\begin{array}{llll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(v,?) \mid v \in Var\} & (e_1) & DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,1)\} & (s_1) \\
DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1) & (e_2) & DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,2)\} & (s_2) \\
DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5) & (e_3) & DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3) & (s_3) \\
DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3) & (e_4) & DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z,4)\} & (s_4) \\
DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4) & (e_5) & DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,5)\} & (s_5) \\
DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3) & (e_6) & DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y,l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y,6)\} & (s_6)
\end{array}
$$

Itération 10 : $\mathrm{F}^{10}(\vec{\emptyset})$

$$
\begin{array}{llll}
DP_{\text{in}}(1) = & \{(x,?),(y,?),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(1) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} \\
DP_{\text{in}}(2) = & \{(x,?),(y,1),(z,?)\} & DP_{\text{out}}(2) = & \{(x,?),(y,1),(z,2)\} \\
DP_{\text{in}}(3) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(3) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(4) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(4) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(5) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(5) = & \{(x,?),(y,5),(z,4)\} \\
DP_{\text{in}}(6) = & \{(x,?),(y,1),(y,5),(z,2),(z,4)\} & DP_{\text{out}}(6) = & \{(x,?),(y,6),(z,2),(z,4)\}
\end{array}
$$

# Analyse des définitions possibles : itération des calculs

La solution peut être calculée par iterations. $DP_{\text{in}}(l)$ et $DP_{\text{out}}(l)$ sont initialisés à $\emptyset$ et leurs valeurs sont recalculées jusqu'à stabilisation.

Équations : $\vec{DP} = \mathtt{F}(\vec{DP})$

$$
\begin{array}{ll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(v, ?) \mid v \in Var\} & (e_1) \\
DP_{\text{in}}(2) = DP_{\text{out}}(1) & (e_2) \\
DP_{\text{in}}(3) = DP_{\text{out}}(2) \cup DP_{\text{out}}(5) & (e_3) \\
DP_{\text{in}}(4) = DP_{\text{out}}(3) & (e_4) \\
DP_{\text{in}}(5) = DP_{\text{out}}(4) & (e_5) \\
DP_{\text{in}}(6) = DP_{\text{out}}(3) & (e_6)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
DP_{\text{out}}(1) = DP_{\text{in}}(1) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 1)\} & (s_1) \\
DP_{\text{out}}(2) = DP_{\text{in}}(2) - \{(z, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z, 2)\} & (s_2) \\
DP_{\text{out}}(3) = DP_{\text{in}}(3) & (s_3) \\
DP_{\text{out}}(4) = DP_{\text{in}}(4) - \{(z, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(z, 4)\} & (s_4) \\
DP_{\text{out}}(5) = DP_{\text{in}}(5) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 5)\} & (s_5) \\
DP_{\text{out}}(6) = DP_{\text{in}}(6) - \{(y, l) \mid l \in Lab^?\} \cup \{(y, 6)\} & (s_6)
\end{array}
$$

Itération

$$
\begin{array}{ll}
DP_{\text{in}}(1) = \{(x, ?), (y, ?), (z, ?)\} & DP_{\text{out}}(1) = \{(x, ?), (y, 1), (z, ?)\} \\
DP_{\text{in}}(2) = \{(x, ?), (y, 1), (z, ?)\} & DP_{\text{out}}(2) = \{(x, ?), (y, 1), (z, 2)\} \\
DP_{\text{in}}(3) = \{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\} & DP_{\text{out}}(3) = \{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\} \\
DP_{\text{in}}(4) = \{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\} & DP_{\text{out}}(4) = \{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 4)\} \\
DP_{\text{in}}(5) = \{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 4)\} & DP_{\text{out}}(5) = \{(x, ?), (y, 5), (z, 4)\} \\
DP_{\text{in}}(6) = \{(x, ?), (y, 1), (y, 5), (z, 2), (z, 4)\} & DP_{\text{out}}(6) = \{(x, ?), (y, 6), (z, 2), (z, 4)\}
\end{array}
$$

Stabilisation !

# Analyse des définitions possibles : solutions multiples ?

Le système d'équations admet plusieurs solutions.

Équations :

$$
\begin{array}{ll}
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{1}) = \{(v,\mathbf{?}) \mid v \in Var\} & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{1}) = DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{1}) - \{(\mathbf{y},\mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y},\mathbf{1})\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{2}) = DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{1}) & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{2}) = DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{2}) - \{(\mathbf{z},\mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{z},\mathbf{2})\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{3}) = DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{2}) \cup DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{5}) & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{3}) = DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{3}) \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{4}) = DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{3}) & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{4}) = DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{4}) - \{(\mathbf{z},\mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{z},\mathbf{4})\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{5}) = DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{4}) & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{5}) = DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{5}) - \{(\mathbf{y},\mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y},\mathbf{5})\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{6}) = DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{3}) & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{6}) = DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{6}) - \{(\mathbf{y},\mathbf{l}) \mid \mathbf{l} \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y},\mathbf{6})\}
\end{array}
$$

Solution précédente :

$$
\begin{array}{ll}
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{1}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{?}),(z,\mathbf{?})\} & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{1}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(z,\mathbf{?})\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{2}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(z,\mathbf{?})\} & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{2}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(z,\mathbf{2})\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{3}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\} & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{3}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{4}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\} & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{4}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{4})\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{5}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{4})\} & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{5}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{4})\} \\
DP_{\mathrm{in}}(\mathbf{6}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{1}),(y,\mathbf{5}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\} & DP_{\mathrm{out}}(\mathbf{6}) = \{(x,\mathbf{?}),(y,\mathbf{6}),(z,\mathbf{2}),(z,\mathbf{4})\}
\end{array}
$$

# Analyse des définitions possibles : solutions multiples ?

Le système d'équations admet plusieurs solutions.

Équations :

$$
\begin{array}{ll}
DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{1}) = \{(v, \mathbf{?}) \mid v \in Var\} & DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{1}) = DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{1}) - \{(\mathbf{y}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y}, \mathbf{1})\} \\
DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{2}) = DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{1}) & DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{2}) = DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{2}) - \{(\mathbf{z}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{z}, \mathbf{2})\} \\
DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{3}) = DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{2}) \cup DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{5}) & DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{3}) = DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{3}) \\
DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{4}) = DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{3}) & DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{4}) = DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{4}) - \{(\mathbf{z}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{z}, \mathbf{4})\} \\
DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{5}) = DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{4}) & DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{5}) = DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{5}) - \{(\mathbf{y}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y}, \mathbf{5})\} \\
DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{6}) = DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{3}) & DP_{\mathsf{out}}(\mathbf{6}) = DP_{\mathsf{in}}(\mathbf{6}) - \{(\mathbf{y}, l) \mid l \in Lab^{\mathbf{?}}\} \cup \{(\mathbf{y}, \mathbf{6})\}
\end{array}
$$

Une autre solution :

$$
\begin{array}{ll}
DP'_{\mathsf{in}}(\mathbf{1}) = \{(x, \mathbf{?}), (y, \mathbf{?}), (z, \mathbf{?})\} & DP'_{\mathsf{out}}(\mathbf{1}) = \{(x, \mathbf{?}), (y, \mathbf{1}), (z, \mathbf{?})\} \\
DP'_{\mathsf{in}}(\mathbf{2}) = \{(x, \mathbf{?}), (y, \mathbf{1}), (z, \mathbf{?})\} & DP'_{\mathsf{out}}(\mathbf{2}) = \{(x, \mathbf{?}), (y, \mathbf{1}), (z, \mathbf{2})\} \\
DP'_{\mathsf{in}}(\mathbf{3}) = \{(x, \mathbf{?}), (x, \mathbf{1}), (y, \mathbf{1}), (y, \mathbf{5}), (z, \mathbf{2}), (z, \mathbf{4})\} & DP'_{\mathsf{out}}(\mathbf{3}) = \{(x, \mathbf{?}), (x, \mathbf{1}), (y, \mathbf{1}), (y, \mathbf{5}), (z, \mathbf{2}), (z, \mathbf{4})\} \\
DP'_{\mathsf{in}}(\mathbf{4}) = \{(x, \mathbf{?}), (x, \mathbf{1}), (y, \mathbf{1}), (y, \mathbf{5}), (z, \mathbf{2}), (z, \mathbf{4})\} & DP'_{\mathsf{out}}(\mathbf{4}) = \{(x, \mathbf{?}), (x, \mathbf{1}), (y, \mathbf{1}), (y, \mathbf{5}), (z, \mathbf{4})\} \\
DP'_{\mathsf{in}}(\mathbf{5}) = \{(x, \mathbf{?}), (x, \mathbf{1}), (y, \mathbf{1}), (y, \mathbf{5}), (z, \mathbf{4})\} & DP'_{\mathsf{out}}(\mathbf{5}) = \{(x, \mathbf{?}), (x, \mathbf{1}), (y, \mathbf{5}), (z, \mathbf{4})\} \\
DP'_{\mathsf{in}}(\mathbf{6}) = \{(x, \mathbf{?}), (x, \mathbf{1}), (y, \mathbf{1}), (y, \mathbf{5}), (z, \mathbf{2}), (z, \mathbf{4})\} & DP'_{\mathsf{out}}(\mathbf{6}) = \{(x, \mathbf{?}), (x, \mathbf{1}), (y, \mathbf{6}), (z, \mathbf{2}), (z, \mathbf{4})\}
\end{array}
$$

# Choix de la meilleure solution

Remarque :

$$DP_{\text{in}}(\mathbf{1}) \subseteq DP'_{\text{in}}(\mathbf{1}),\ \ DP_{\text{out}}(\mathbf{1}) \subseteq DP'_{\text{out}}(\mathbf{1}),\ \ \ldots,\ DP_{\text{out}}(\mathbf{6}) \subseteq DP'_{\text{out}}(\mathbf{6})$$

$DP$ donne des informations plus précises que $DP'$ :

- $DP_{\text{in}}(\mathbf{3}) = \{(\mathrm{x}, \mathbf{?}), (\mathrm{y}, \mathbf{1}), (\mathrm{y}, \mathbf{5}), (\mathrm{z}, \mathbf{2}), (\mathrm{z}, \mathbf{4})\}$

  *"la valeur de $\mathtt{x}$ au point 3 n'est pas initialisée"*
- $DP'_{\text{in}}(\mathbf{3}) = \{(\mathrm{x}, \mathbf{?}), (\mathrm{x}, \mathbf{1}), (\mathrm{y}, \mathbf{1}), (\mathrm{y}, \mathbf{5}), (\mathrm{z}, \mathbf{2}), (\mathrm{z}, \mathbf{4})\}$

  *"la valeur de $\mathtt{x}$ au point 3 n'est pas initialisée, ou a été définie au point 1"*

Parmi deux solutions comparables (e.g. $\vec{DP} \subseteq \vec{DP}'$), préférer la plus petite.

Résultat théorique : il existe toujours une plus petite solution

# Équations de flot pour les définitions possibles - Bilan

Domaine des propriétés de flots de données :

$$DP_{\text{in}}(n), DP_{\text{out}}(n) \in \wp(\mathit{Var} \times \mathit{Lab}^{?})$$

Pour tout point $n$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{kill}(n) &= \left\{(x, n') \mid x \in \mathbf{def}(n), n' \in \mathit{Lab}^{?}\right\} \\
\mathbf{gen}(n) &= \{(x, n) \mid x \in \mathbf{def}(n)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
DP_{\text{in}}(n) &= \begin{cases} \{(x, ?) \mid x \in \mathit{Var}\} & \text{si } n \text{ noeud initial} \\ \displaystyle\bigcup_{n' \to n} DP_{\text{out}}(n') & \end{cases} \\
DP_{\text{out}}(n) &= (DP_{\text{in}}(n) - \mathbf{kill}(n)) \cup \mathbf{gen}(n)
\end{aligned}$$

# Exercice

1. Écrire les équations relatives au programme suivant (en réduisant à 7 points le graphe).
2. Calculer les différentes itérations menant au calcul des définitions possibles du programme.
3. Quelle(s) optimisation(s) du programme pourrai(en)t bénéficier de cette analyse ?

```
entry:
  a = 5
  c = 1
  goto l1
l1:
  t.0 = Lt(a c)
  if t.0 goto l2  else suite
suite:
  c = Add(c c)
  goto l1
l2:
  a = Sub(c a)
  c = 0
```

# Optimisation de programme

L'analyse des définitions possibles peut permettre de *propager les constantes*.

S'il existe un point $n$ d'*usage* de $x$

```
n: y = Add(1,x)
```

tel que

- la seule définition possible arrivant en $n$, et concernant $x$, est $(x, d)$,
- avec au point $d$ une instruction de la forme

  ```
  d: x = const
  ```

alors l'instruction en $n$ peut être remplacée par

```
n: y = 1+const
```

# Les chaînes *Use-def* et *def-use*

L'analyse des définitions possibles permet de calculer (voir TP3) des *chaînes* reliant

- les usages à leurs définitions (*use-def* UD),
- et les définitions à leurs usages (*def-use* DU)

Ces informations sont utiles pour réaliser certains transformations et analyses (par exemple la propagation de constantes).

# Résolution des équations

L'analyse des définitions possibles est une solution d'un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} x_1 & = & f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ & \vdots & \\ x_n & = & f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad \text{or} \qquad \vec{x} = \vec{F}(\vec{x})$$

appelé équations de point fixe.

# Résolution des équations : accélération

Sur les exemples précédents, nous avons trouvé le plus petit point fixe en calculant les itérés $\vec{F}^k(\vec{\emptyset})$, mais on peut aussi accélérer la convergence en *injectant* les résultats des récentes mise-à-jours, *dès que possible* en considérant la fonction $\vec{x'} = \vec{F_{bis}}(\vec{x})$ suivante :

$$\begin{cases} x'_1 & = & f_1(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ x'_2 & = & f_1(x'_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ & \vdots & \\ x_{n-1} & = & f_{n-1}(x'_1, x'_2, \ldots, x_n) \\ x_n & = & f_n(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}, x_n) \end{cases} \qquad \vec{x'} = \vec{F_{bis}}(\vec{x})$$

C'est la technique que nous avons employée lors du CM3 (et en TP). Elle aboutit au même résultat, mais généralement plus rapidement.

# Collections Java : construires des `HashSet<A>`

Pour implémenter une interface de type `Set<A>`, on peut utiliser `HashSet<A>` mais en veillant à bien redéfinir les méthodes suivantes dans la classe A :

```
public int hashCode() {}
```

# `public int hashCode()` [1]

*Returns a hash code value for the object. This method is supported for the benefit of hashtables such as those provided by* `java.util.Hashtable`*.*

*The general contract of* `hashCode` *is :*

- *Whenever it is invoked on the same object more than once during an execution of a Java application, the hashCode method must consistently return the same integer, provided no information used in equals comparisons on the object is modified. This integer need not remain consistent from one execution of an application to another execution of the same application.*
- *If two objects are equal according to the equals(Object) method, then calling the hashCode method on each of the two objects must produce the same integer result.*
- *It is not required that if two objects are unequal according to the equals(java.lang.Object) method, then calling the hashCode method on each of the two objects must produce distinct integer results. However, the programmer should be aware that producing distinct integer results for unequal objects may improve the performance of hashtables.*

1. https ://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/java/lang/Object.html#hashCode()

Analyse des définitions possibles

2 Analyse des expressions disponibles

# Expressions disponibles

Déterminer les expressions dont la valeur a été calculée pour tout les chemins menant au nœud courant, sans que les variables de l'expression n'aient été redéfinies depuis.

Exemple :

```
1.  x = a + b;
1.  y = a - b;
2.  if (a<b) {
3.    a = 0
4.    z = a + b;
    }
5.
```

Au point 5, l'expression `a+b` est disponible, mais pas l'expression `a-b` (à cause de la redéfinition au point 3).

# Expressions disponibles

Déterminer les expressions dont la valeur a été calculée pour tout les chemins menant au nœud courant, sans que les variables de l'expression n'aient été redéfinies depuis.

Remarque : les seules expressions à considérer sont celles apparaissant dans le membre droit d'une affectation du programme.

Domaine des valeurs : $ED_{\text{in}}(\mathfrak{l}), ED_{\text{out}}(\mathfrak{l}) \in \mathcal{P}(Exp)$

Le langage d'expressions $Exp$ doit être choisi en fonction du langage analysé.

# Exercice : expressions disponibles

Construire et résoudre le système d’équations pour l’analyse d’expressions disponibles du programme suivant

```
x = a + b;
y = a * b;
while  (y > a+b) {
  a = a + 1;
  x = a + b; }
```

# Exercice : expressions disponibles

Construire et résoudre le système d'équations pour l'analyse d'expressions disponibles du programme suivant

$$[\mathbf{x} := \mathbf{a} + \mathbf{b}]^1; [\mathbf{y} := \mathbf{a} * \mathbf{b}]^2; \mathbf{while}\ [\mathbf{y} > \mathbf{a} + \mathbf{b}]^3\ \mathbf{do}\ ([\mathbf{a} := \mathbf{a} + \mathbf{1}]^4; [\mathbf{x} := \mathbf{a} + \mathbf{b}]^5)$$

# Exercice : expressions disponibles

Construire et résoudre le système d'équations pour l'analyse d'expressions disponibles du programme suivant

$$[\mathtt{x} := \mathtt{a} + \mathtt{b}]^1; [\mathtt{y} := \mathtt{a} * \mathtt{b}]^2; \mathtt{while}\ [\mathtt{y} > \mathtt{a} + \mathtt{b}]^3\ \mathtt{do}\ ([\mathtt{a} := \mathtt{a} + 1]^4; [\mathtt{x} := \mathtt{a} + \mathtt{b}]^5)$$

$$\begin{array}{rcl}
ED_{\text{in}}(1) & = & \emptyset \\
ED_{\text{in}}(2) & = & ED_{\text{out}}(1) \\
ED_{\text{in}}(3) & = & ED_{\text{out}}(2) \cap ED_{\text{out}}(5) \\
ED_{\text{in}}(4) & = & ED_{\text{out}}(3) \\
ED_{\text{in}}(5) & = & ED_{\text{out}}(4) \\
ED_{\text{out}}(1) & = & ED_{\text{in}}(1) \cup \{\mathtt{a} + \mathtt{b}\} \\
ED_{\text{out}}(2) & = & ED_{\text{in}}(2) \cup \{\mathtt{a} * \mathtt{b}\} \\
ED_{\text{out}}(3) & = & ED_{\text{in}}(3) \\
ED_{\text{out}}(4) & = & ED_{\text{in}}(4) - \{\mathtt{a} + \mathtt{b}, \mathtt{a} * \mathtt{b}, \mathtt{a} + 1\} \\
ED_{\text{out}}(5) & = & ED_{\text{in}}(5) \cup \{\mathtt{a} + \mathtt{b}\}
\end{array}$$

# Exercice : expressions disponibles

Construire et résoudre le système d'équations pour l'analyse d'expressions disponibles du programme suivant

$$[\mathbf{x} := \mathbf{a} + \mathbf{b}]^1;\ [\mathbf{y} := \mathbf{a} * \mathbf{b}]^2;\ \mathtt{while}\ [\mathbf{y} > \mathbf{a} + \mathbf{b}]^3\ \mathbf{do}\ ([\mathbf{a} := \mathbf{a} + 1]^4;\ [\mathbf{x} := \mathbf{a} + \mathbf{b}]^5)$$

$$\begin{array}{rcl}
ED_{\text{in}}(\mathbf{1}) & = & \emptyset \\
ED_{\text{out}}(\mathbf{1}) & = & \{\mathbf{a} + \mathbf{b}\} \\
ED_{\text{in}}(\mathbf{2}) & = & \{\mathbf{a} + \mathbf{b}\} \\
ED_{\text{out}}(\mathbf{2}) & = & \{\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} * \mathbf{b}\} \\
 & & \\
ED_{\text{in}}(\mathbf{3}) & = & \{\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} * \mathbf{b}\} \cap ED_{\text{out}}(\mathbf{5}) \\
ED_{\text{in}}(\mathbf{4}) & = & ED_{\text{out}}(\mathbf{3}) \\
ED_{\text{in}}(\mathbf{5}) & = & ED_{\text{out}}(\mathbf{4}) \\
 & & \\
ED_{\text{out}}(\mathbf{3}) & = & \{\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} * \mathbf{b}\} \cap ED_{\text{out}}(\mathbf{5}) \\
ED_{\text{out}}(\mathbf{4}) & = & ED_{\text{out}}(\mathbf{3}) - \{\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} * \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{1}\} \\
ED_{\text{out}}(\mathbf{5}) & = & ED_{\text{out}}(\mathbf{4}) \cup \{\mathbf{a} + \mathbf{b}\}
\end{array}$$

# Expressions disponibles : équations

Déterminer les expressions dont la valeur se trouve déjà dans une variable.

Domaine des valeurs : $ED_{\text{in}}(n), ED_{\text{out}}(n) \in \mathcal{P}(Exp)$

Pour tout point $n$,

$$
\begin{aligned}
\textbf{kill}(n) &= \textbf{?} \\
\textbf{gen}(n) &= \textbf{?} \\
\\
ED_{\text{in}}(n) &= \\
\\
ED_{\text{out}}(n) &=
\end{aligned}
$$

# Expressions disponibles : équations

Déterminer les expressions dont la valeur se trouve déjà dans une variable.

Domaine des valeurs : $ED_{\text{in}}(n), ED_{\text{out}}(n) \in \mathcal{P}(Exp)$

Pour tout point $n$,

$$
\begin{array}{rcl}
\textbf{kill}(n) & = & \textbf{?} \\
\textbf{gen}(n) & = & \textbf{?} \\
ED_{\text{in}}(n) & = & \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \text{ point d'entrée} \\ \displaystyle\bigcap_{n' \to n} ED_{\text{out}}(n') & \end{cases} \\
ED_{\text{out}}(n) & = & (ED_{\text{in}}(n) - \textbf{kill}(n)) \cup \textbf{gen}(n)
\end{array}
$$

# Expressions disponibles : plus petit ou plus grand point fixe ?

Cette fois, une information $s_1 \in \mathcal{P}(Exp)$ est plus précise qu'une information $s_2 \in \mathcal{P}(Exp)$ si $s_2 \subset s_1$ !

Il faut donc renverser l'ordre pris pour l'analyse des définitions possibles.

Conséquences :

- on calcule le plus grand point fixe (pour l'ordre $\subseteq$ composantes par composantes)
- on démarre l'itération avec le plus grand élément de $\mathcal{P}(Exp)$ (pour $\subseteq$) dans chaque variables

# Exercice : expressions disponibles

Construire et résoudre le système d'équations pour l'analyse d'expressions disponibles du programme suivant

$$[\mathbf{x} := \mathbf{a}+\mathbf{b}]^1;\ [\mathbf{y} := \mathbf{a}*\mathbf{b}]^2;\ \mathtt{while}\ [\mathbf{y} > \mathbf{a}+\mathbf{b}]^3\ \mathtt{do}\ ([\mathbf{a} := \mathbf{a}+\mathbf{1}]^4;\ [\mathbf{x} := \mathbf{a}+\mathbf{b}]^5)$$

$$\begin{array}{lcll} ED_{\text{out}}(\mathbf{3}) & = & \{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}*\mathbf{b}\} \cap ED_{\text{out}}(\mathbf{5}) & (\mathbf{1}) \\ ED_{\text{out}}(\mathbf{4}) & = & ED_{\text{out}}(\mathbf{3}) - \{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}*\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{1}\} & (\mathbf{2}) \\ ED_{\text{out}}(\mathbf{5}) & = & ED_{\text{out}}(\mathbf{4}) \cup \{\mathbf{a}+\mathbf{b}\} & (\mathbf{3}) \end{array}$$

Nous cherchons le plus grand point fixe, aussi nous partons de l'ensemble $\top = \{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}*\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{1}\}$

Nous accélérons la convergence en réinjectant les résultats nouveaux au fur et à mesure.

| | | $\{\mathbf{1}\}$ | $\{\mathbf{2}\}$ | $\{\mathbf{3}\}$ | $\{\mathbf{1}\}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $ED_{\text{out}}(\mathbf{3})$ | $\top$ | $\{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}*\mathbf{b}\}$ | — | — | $\{\mathbf{a}+\mathbf{b}\}$ | stable |
| $ED_{\text{out}}(\mathbf{4})$ | $\top$ | — | $\emptyset$ | — | — | stable |
| $ED_{\text{out}}(\mathbf{5})$ | $\top$ | — | — | $\{\mathbf{a}+\mathbf{b}\}$ | — | stable |

# Exercice : expressions disponibles

Construire et résoudre le système d'équations pour l'analyse d'expressions disponibles du programme suivant

$$[\mathtt{x} := \mathtt{a}+\mathtt{b}]^1; [\mathtt{y} := \mathtt{a}*\mathtt{b}]^2; \mathtt{while}\ [\mathtt{y} > \mathtt{a}+\mathtt{b}]^3\ \mathtt{do}\ ([\mathtt{a} := \mathtt{a}+1]^4; [\mathtt{x} := \mathtt{a}+\mathtt{b}]^5)$$

$$\begin{array}{rcl}
ED_{\mathsf{in}}(1) & = & \emptyset \\
ED_{\mathsf{out}}(1) & = & \{\mathtt{a}+\mathtt{b}\} \\
ED_{\mathsf{in}}(2) & = & \{\mathtt{a}+\mathtt{b}\} \\
ED_{\mathsf{out}}(2) & = & \{\mathtt{a}+\mathtt{b}, \mathtt{a}*\mathtt{b}\} \\
 & & \\
ED_{\mathsf{in}}(3) & = & \{\mathtt{a}+\mathtt{b}\} \\
ED_{\mathsf{in}}(4) & = & \{\mathtt{a}+\mathtt{b}\} \\
ED_{\mathsf{in}}(5) & = & \emptyset \\
 & & \\
ED_{\mathsf{out}}(3) & = & \{\mathtt{a}+\mathtt{b}\} \\
ED_{\mathsf{out}}(4) & = & \emptyset \\
ED_{\mathsf{out}}(5) & = & \{\mathtt{a}+\mathtt{b}\}
\end{array}$$

# Optimisation associée à l'analyse d'expressions disponibles : élimination d'expressions communes

a+b est disponible avant la boucle.

```
1.   x = a + b;

2.   y = a * b;
3.   while  (y > a+b) {
4.     a = a + 1;
5.     x = a + b; }

6.   r = a+b;
```

```
1.    x = a + b;
1'.   tmp = x;
2.    y = a * b;
3.    while  (y > tmp) {
4.      a = a + 1;
5.      x = a + b;
5'.     tmp = x; }
6.    r = tmp;
```

Sur cet exemple, les définitions des lignes 1 et 5 sont les mêmes mais ce ne sera pas toujours le cas ! (voir TP4)

# Exercice : expressions disponibles

Construire et résoudre le système d'équations pour l'analyse d'expressions disponibles du programme suivant

```
if (a < b) {
    x = a+b;
    y = x+1;
}
else {
    x = d+e;
    y = a+b;
}
z = a+b;
t = x+1;
```

Comment optimiser ce programme par élimination des sous-expressions communes ?

# Exercice : expressions disponibles

Calculer les chaînes UD et DU, ainsi que les expressions disponibles du programme suivant

```
func Main(a b d e)
  entry:
    t.0 = Lt(a b)
    if t.0 goto if0_then else if0_else
  if0_then:
    x = Add(a b)
    y = Add(x 1)
    goto if0_end
  if0_else:
    x = Add(d e)
    y = Add(a b)
    goto if0_end
  if0_end:
    z = Add(a b)
    t = Add(x 1)
    ret t
```

# Exercice : expressions disponibles

Comment optimiser ce programme par élimination des sous-expressions communes ?

```
entry: a = 1
       b = 2
       goto suite
suite: c = Add(a b)
       d = Sub(c a)
       goto test_boucle
test_boucle: t.0 = Lt(b 10)
       if t.0 goto corps_boucle else fin_boucle
corps_boucle: b = Add (a b)
              e = Sub(c a)
              goto test_boucle
fin_boucle: t.1 = Lt(d 20)
            if t.1 goto corps_boucle2 else fin_boucle2
corps_boucle2: d = Add(b d)
               d = Add(a b)
               e = Add(e 1)
               goto fin_boucle
fin_boucle2: a = Mul(b d)
             t = Sub(a d)
```

# Lecture complémentaire

Lire le chapitre 17 *Dataflow Analysis*