Cours 5

Calcul propositionnel : sémantique (suite et fin)

Substitutions

Notation : $F[p_1, \ldots, p_n]$ indique qu'une formule F ne comporte pas de variables en dehors de $p_1, \ldots, p_n$.

Proposition

Soit $F[p_1, .., p_n]$ une formule et φ une valuation, alors la valeur $\varphi(F)$ ne dépend que de la valeur de φ sur $p_1, .., p_n$.

Proposition

Soient F et G deux formules et φ une valuation, alors la valeur de $F[G/p]$ pour φ est égale à la valeur de F pour une valuation φ' telle que $\varphi'(p) = \varphi(G)$ et $\varphi'(q) = \varphi(q)$ pour tout $q \in \mathbb{V} \setminus \{p\}$.

Substitutions

Corollaire

Soit F, F', G, G' des formules et $p \in \mathbb{V}$:

- *si F est une tautologie alors $F[G/p]$ est une tautologie*
- *si $F \equiv F'$ alors $F[G/p] \equiv F'[G/p]$*
- *si $G \equiv G'$ alors $F[G/p] \equiv F[G'/p]$*

Exemples :

- pour toutes formules F, G, H, $((F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H)))$ est une tautologie.
- $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$

Formes normales

Théorème

On a une bijection entre les applications de $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *et l'ensemble des formules sur* $p_1, .., p_n$ *quotienté par* $\equiv$.

Représentants particuliers : formes normales

- Forme normale disjonctive (FND) : $F = G_1 \vee .. \vee G_k$ et $G_i = (B_{i,1} \wedge .. \wedge B_{i,n_i})$ avec $B_{i,j} = p$ ou $\neg p$ (*litéral*).
- Forme normale conjonctive (FNC) : $F = G_1 \wedge .. \wedge G_k$ et $G_i = (B_{i,1} \vee .. \vee B_{i,n_i})$ avec $B_{i,j}$ un litéral.

Théorème

Tout formule est équivalente à une formule sous FND et une formule sous FNC.

Remarque : on s'autorise à supprimer des parenthèses quand cela ne change pas la classe d'équivalence.

Forme normale

Comment calculer une forme normale ?

1. à partir de la table de vérité
2. par manipulation symbolique
   1. mise sous forme normale négative (les seuls connecteurs autorisés sont $\vee$, $\wedge$, $\neg$; les négations ne portent que sur des variables propositionnelles)

$$\begin{aligned}(A \iff B) &\equiv ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))\\ (A \Rightarrow B) &\equiv (\neg A \vee B)\\ \neg(A \wedge B) &\equiv (\neg A \vee \neg B)\\ \neg(A \vee B) &\equiv (\neg A \wedge \neg B)\end{aligned}$$

   2. distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ (et de $\vee$ sur $\wedge$)

$$(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$
$$(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

Encodage de Tseitin

Problème :

- les techniques des mise en forme normale précédentes peuvent augmenter de façon exponentielle la taille d'une formule

Encodage de Tseitin (mise en FNC) :

- chaque sous formule $(A \propto B)$ (ou $\neg A$) est *remplacée* par une variable propositionnelle fraîche x
- on ajoute par conjonction $(x \iff (A \propto B))$ (mis en FNC)

Propriétés :

- la formule en FNC obtenue n'a augmenté en taille qu'avec un facteur linéaire
- F satisfiable si et seulement Tseitin(F) satisfiable

Systèmes complets de connecteurs

Définition

Un système complet de connecteurs est un ensemble de connecteurs qui permet d'engendrer toutes les applications de $\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$

Exemple : $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\text{nand}\}$, $\{\text{nor}\}$.

Théorème de compacité

Définition

Un ensemble Σ de formules est *finiment satisfiable* si tout sous-ensemble fini de Σ est satisfiable.

Théorème (de compacité)

Σ satisfiable si et seulement si Σ finiment satisfiable.

Ce théorème admet un corollaire très utile pour les résultats de complétude qui suivront.

Corollaire

Une formule F est conséquence sémantique d'un ensemble de formules Σ ($\Sigma \models F$) si et seulement si il existe un sous-ensemble fini Σ_{fini} de Σ tel que $\Sigma_{\text{fini}} \models F$.

Preuve[1] du théorème de compacité

Nous démontrons le résultat équivalent suivant

Σ non-satisfiable si et seulement si
il existe un sous-ensemble fini de Σ non-satisfiable

Le sens $(\Leftarrow)$ est direct.

Seul le sens $(\Rightarrow)$ est difficile. Nous allons nous appuyer sur lemme de König.

[1] Cf cours de Jean Goubault-Larrecq :
`http://www.lsv.ens-cachan.fr/~goubault/prop.pdf`

Lemme de König

Un arbre est un ensemble d'objets, appelé *noeuds*, muni d'une relation binaire $\rightarrow$, dite de *succession immédiate*, et d'un noeud r appelé *racine*, vérifiant :

- r n'est le successeur immédiat d'aucun noeud ;
- tout noeud n autre que r a un unique prédécesseur immédiat, c'est-à-dire qu'il existe un unique noeud m tel que $m \rightarrow n$;
- tout noeud n est successeur de r, c'est-à-dire $r \rightarrow^\star n$, où $\rightarrow^\star$ désigne la clôture réflexive transitive de $\rightarrow$.

Un arbre est à *branchement fini* si tous les noeuds n'ont qu'un nombre fini de successeurs immédiats. Il est *fini* si et seulement si l'ensemble de ses noeuds est fini. Une *branche* est une suite finie ou infinie de noeuds n_i, avec $n_0 = r$, et $n_i \rightarrow n_{i+1}$ pour tout i.

Lemme de König

Lemme (König)

Tout arbre a branchement fini et dont toutes les branches sont finies, est fini.

Preuve : Nous considérons un arbre T, à branchement fini, qui soit infini. Nous montrons que T a nécessairement un branche infinie.

Nous construisons une branche infinie de noeuds n_i tel que le sous-arbre de T de racine n_i (*i.e.* l'ensemble des noeud n de T tels que $n_i \rightarrow^\star n$) soit infini. Nous construisons cette suite par récurrence sur i.

- $i = 0$: il suffit de prendre $n_0 = r$ car T est infini.
- nous supposons que $r = n0, \ldots, n_i$ sont construits. Puisque le sous-arbre de T de racine n_i est infini, il existe nécessairement parmi les successeurs $n_i^1, \ldots, n_i^k$ (en nombre fini) un noeud racine d'un sous-arbre infini. Un tel noeud nous fournit un choix valide pour n_{i+1}.

Preuve du théorème de compacité

Arbre sémantique : définition

Nous avons supposé $\mathbb{V} = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ dénombrable. Nous définissons l'arbre infinie T_0 suivant

- les noeuds de T_0 sont des valuations partielles dont le domaine est de la forme $\{p_1, \ldots, p_i\}$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$;
- la racine est la valuation de domaine vide ;
- pour toute valuation partielle φ de domaine $\{p_1, \ldots, p_i\}$, les deux seuls successeurs immédiats de φ sont les valuations φ^+ et φ^- de domaines $\{p_1, \ldots, p_{i+1}\}$ qui coïncident avec φ sur $\{p_1, \ldots, p_i\}$ et telles que $\varphi^+(p_{i+1}) = 1$ et $\varphi^-(p_{i+1}) = 0$.

Preuve du théorème de compacité

Arbre sémantique : observations

Quelques observations

- T_0 est à branchement fini ;
- chaque branche infinie décrit une unique valuation, qui est l'union des valuations partielles correspondant à chaque noeud ;
- tout valuation φ définit une unique branche infinie, obtenue en descendant à gauche ou à droite selon les valeurs attribuées à chaque variable p_i

Preuve du théorème de compacité

Noeuds d'échecs

Nous considérons un ensemble de formule Σ non-satisfiables.

- Pour toute branche de T_0, *i.e.* toute valuation φ, il existe une formule F_φ de Σ telle que $\varphi \not\models F_\varphi$.
- Chaque F_φ ne contient qu'un nombre fini de variables donc il existe toujours une sous branche finie de T_0 dont la valuation partielle correspondante ne satisfait pas F_φ. Pour chaque φ nous choisissons un tel noeud, appelé *noeud d'échec*.

Preuve du théorème de compacité

Conclusions

Considérons l'arbre T obtenu à partir de T_0 en tronquant chaque branche φ juste après son noeud d'échec. Formellement, T est la restriction de T_0 aux noeuds dont aucun prédécesseur strict n'est un noeud d'échec pour une quelconque formule.

- T est à branchement fini,
- toutes les branches de T sont finies

Donc T est fini, d'après le lemme de König. En particulier, il n'a qu'un nombre fini de feuilles (noeuds sans successeurs).

- chaque feuille est le noeud d'échec d'une certaine formule F_φ
- l'ensemble (fini) de ces formules forme un ensemble non-satisfiable