Réseaux de flot

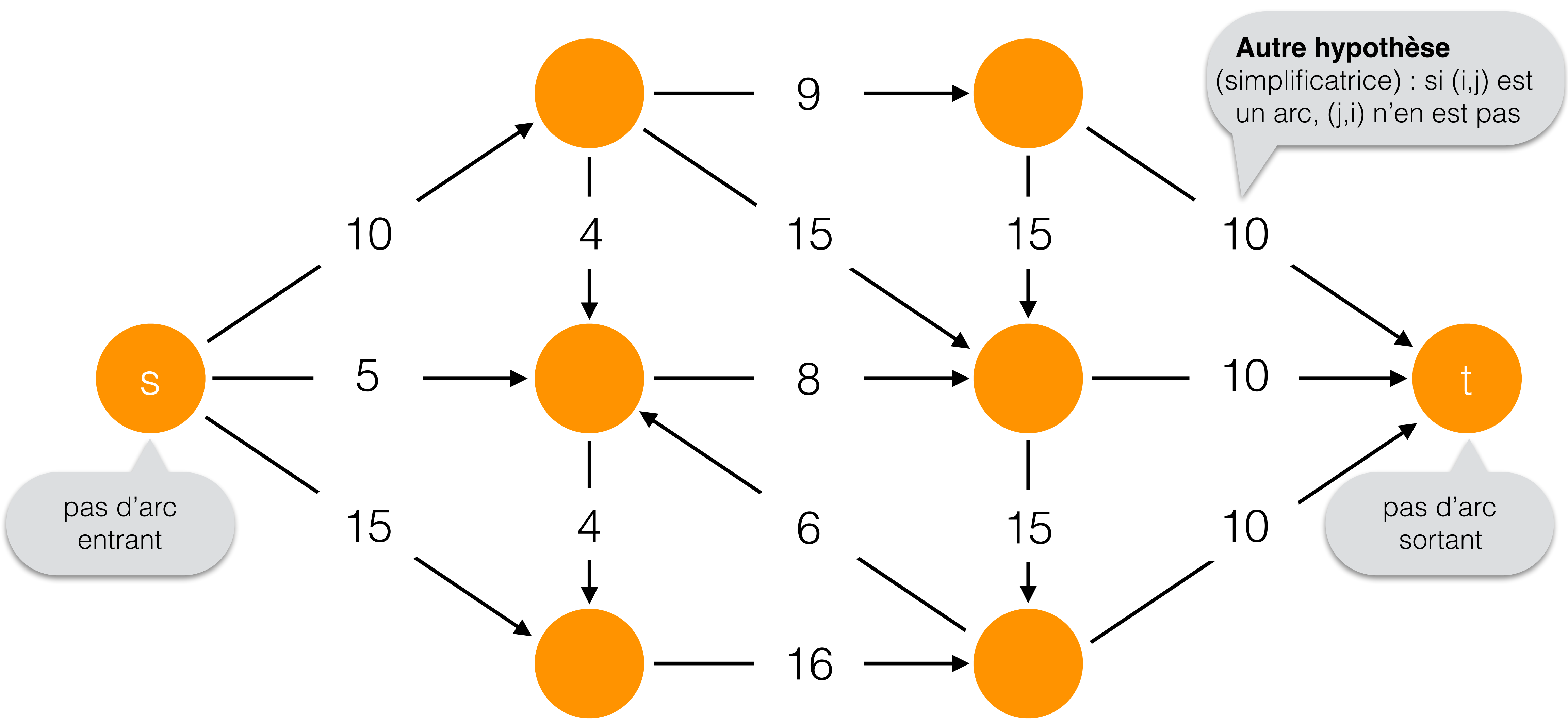
8 novembre 2016

David Pichardie

Le problème du flot maximum

Entrée

- un graphe pondéré (par une *capacité* notée *c*)
- poids positifs ou nuls
- un sommet *source* s et un sommet *cible* t

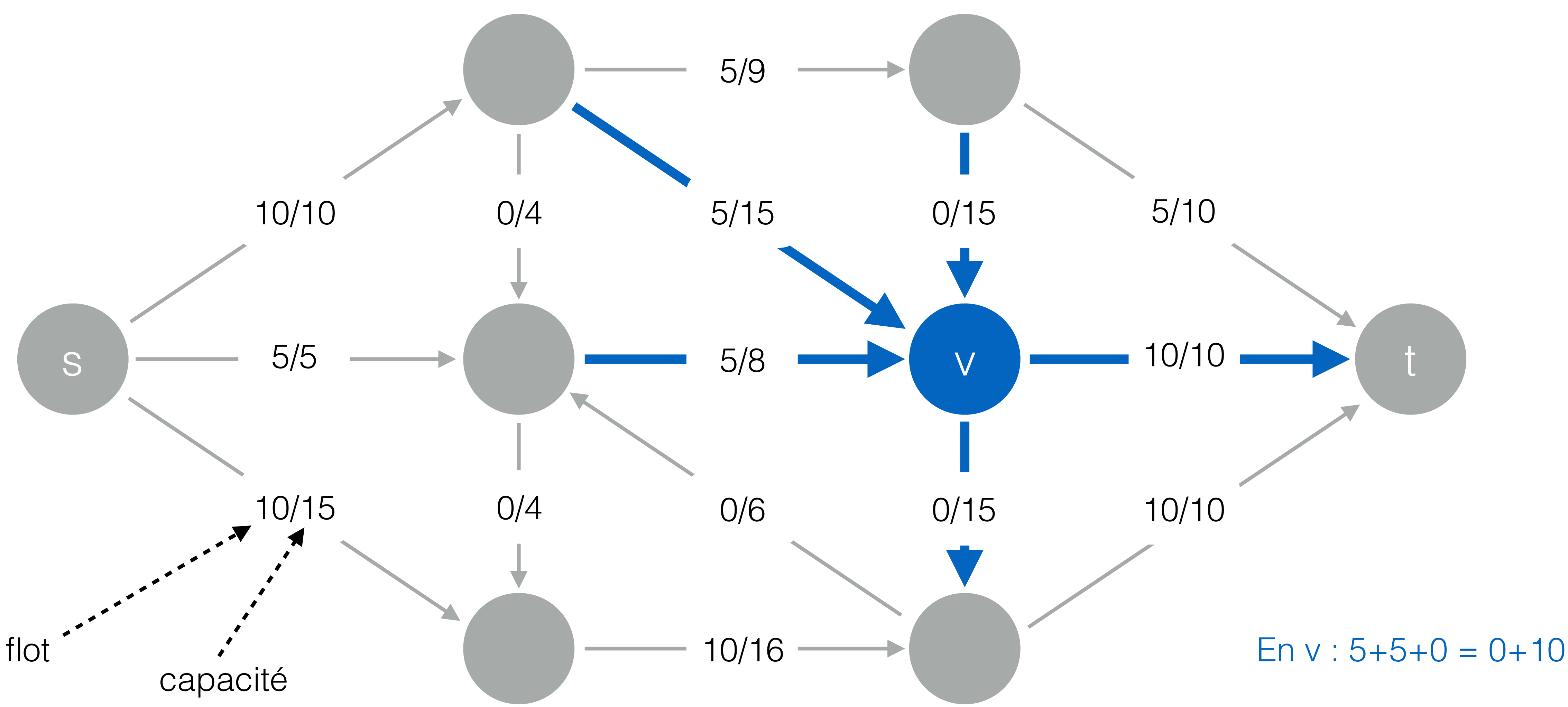


Le problème du flot maximum

Définition. Un *flot* est une pondération (notée *f*) des arcs telle que

- pour chaque arc *e*, $0 \leq f(e) \leq c(e)$
- en chaque sommet,
  somme des poids des arcs entrants = somme des poids des arcs sortant

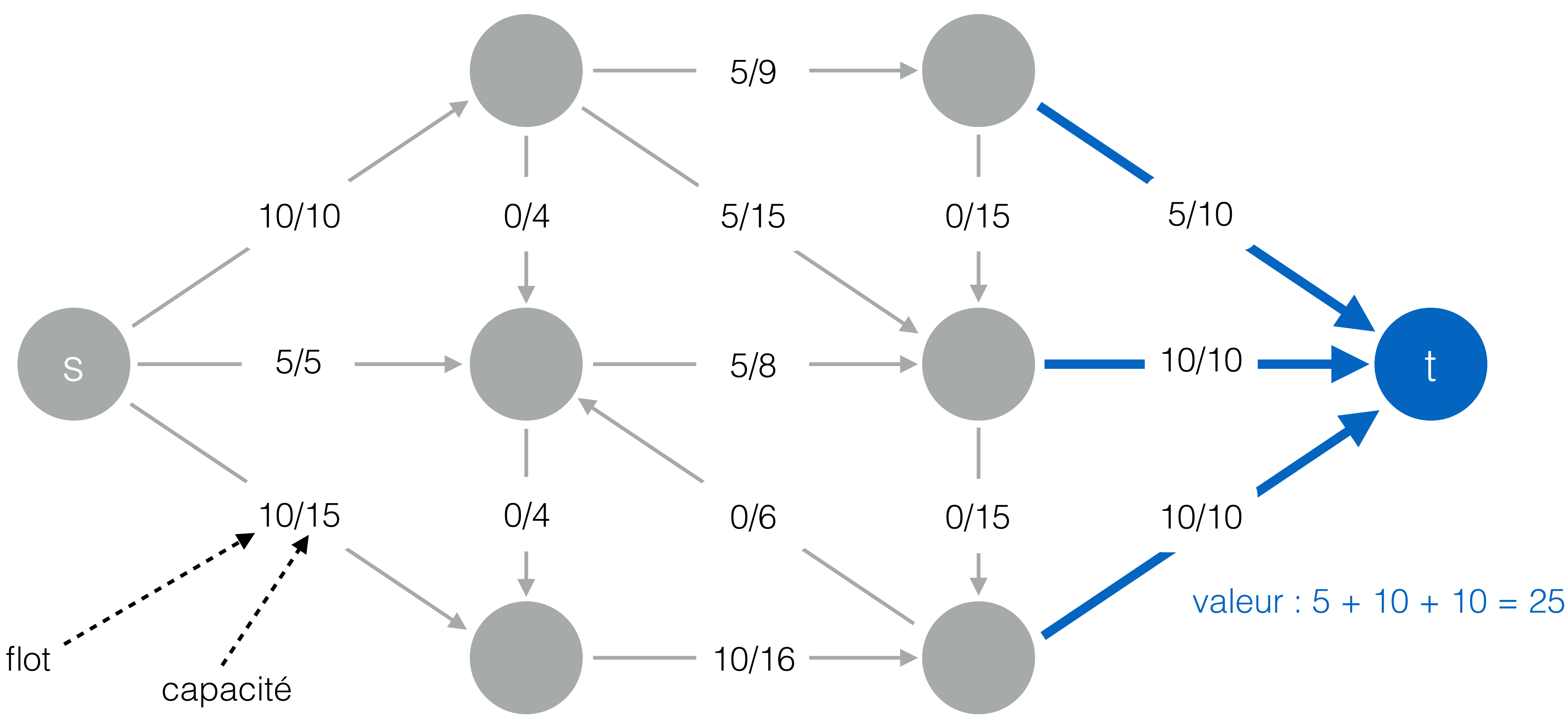
équilibre local



Le problème du flot maximum

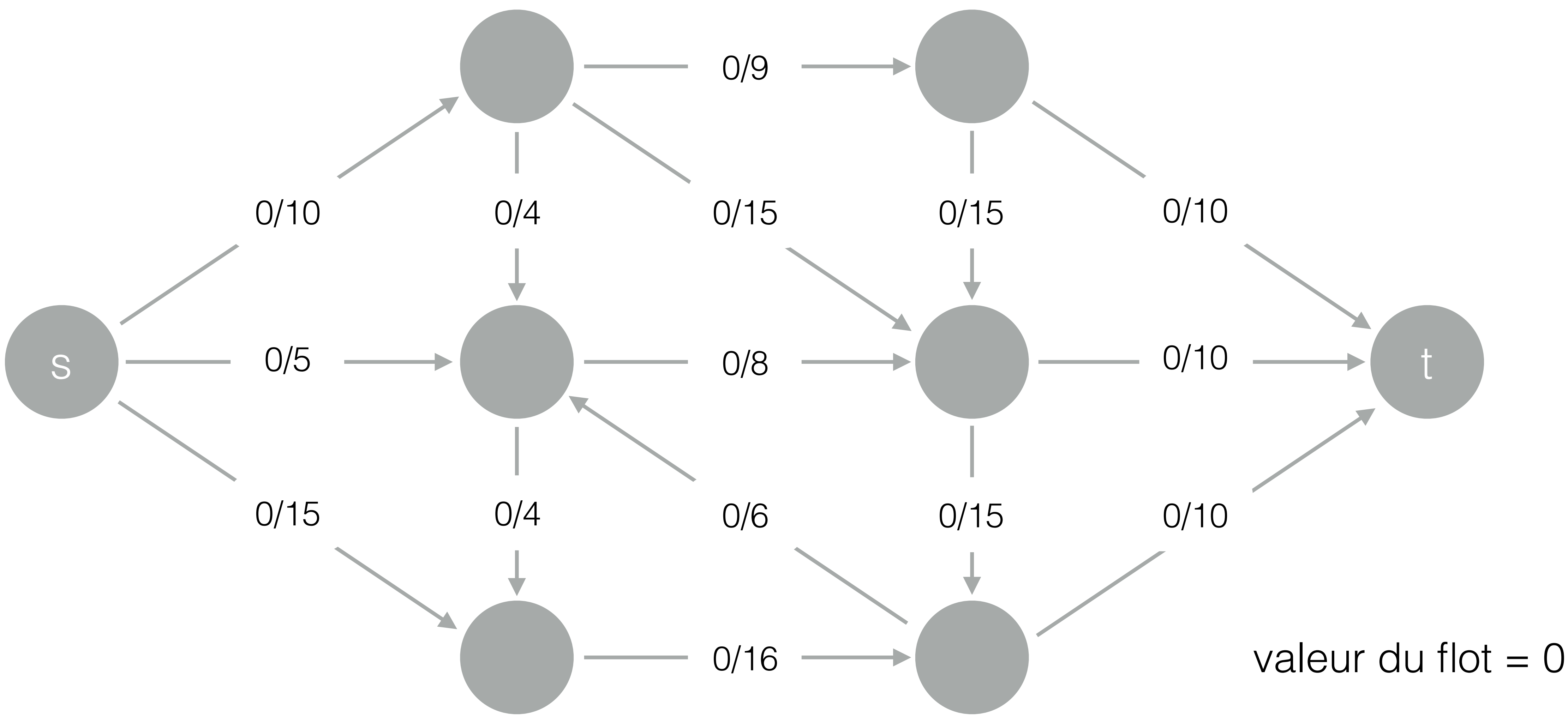
Définition. La *valeur* du flot est la somme des flots entrants dans le sommet cible

Problème du flot maximum : trouver un flot de valeur maximum



Algorithme de Ford-Fulkerson

Initialisation. Au départ, un flot nul.



Algorithme de Ford-Fulkerson

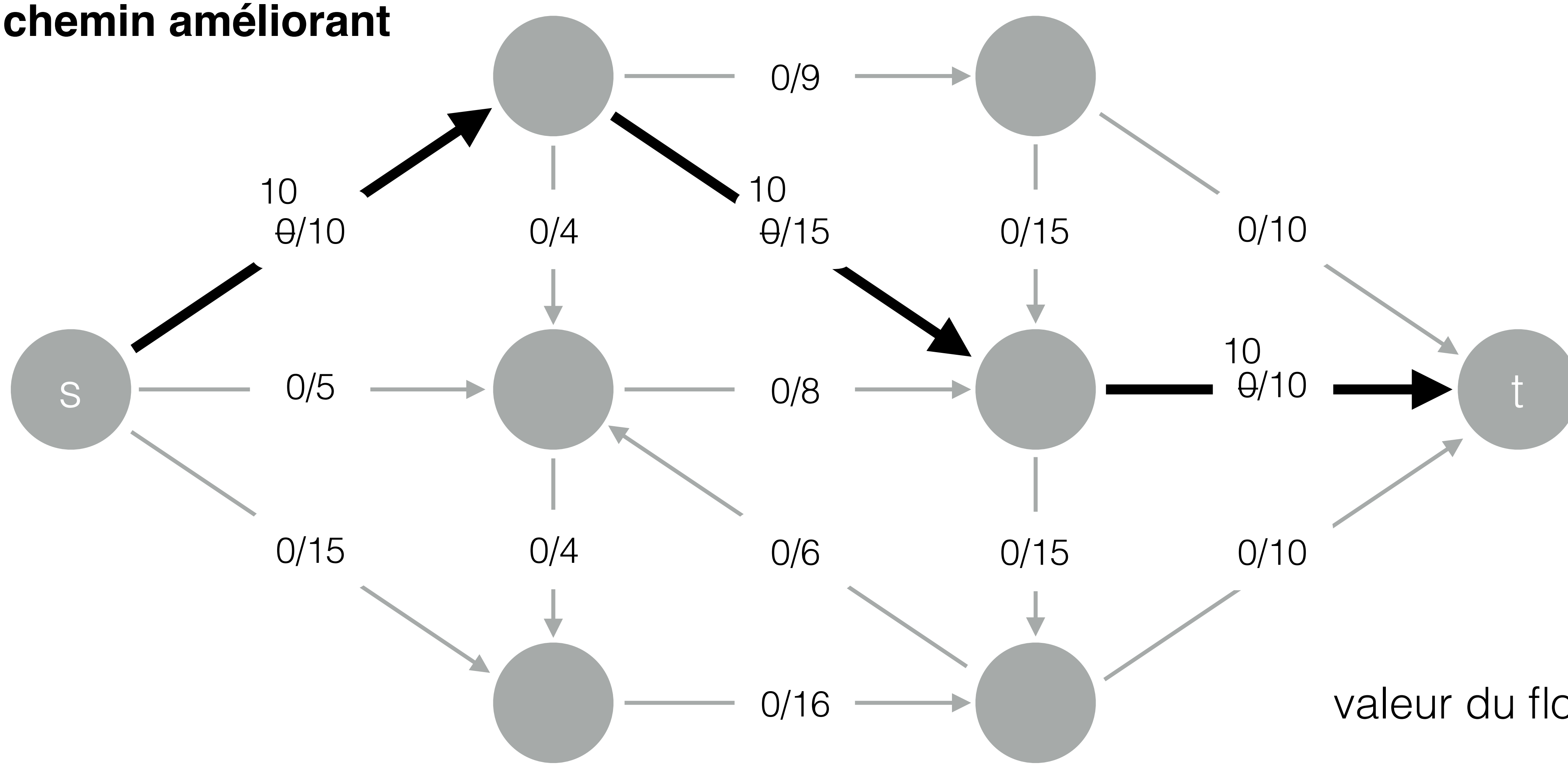
Chemin améliorant : on cherche un chemin (dans le graphe non orienté associé) de *s* à *t*

- qui augmente de *w* le flot des arcs empruntés en avant
- qui diminue de de *w* le flot des arcs empruntés en arrière

sans dépasser la capacité de l'arc

sans rendre le flot négatif sur cet arc

1er chemin améliorant



valeur du flot = 10

Algorithme de Ford-Fulkerson

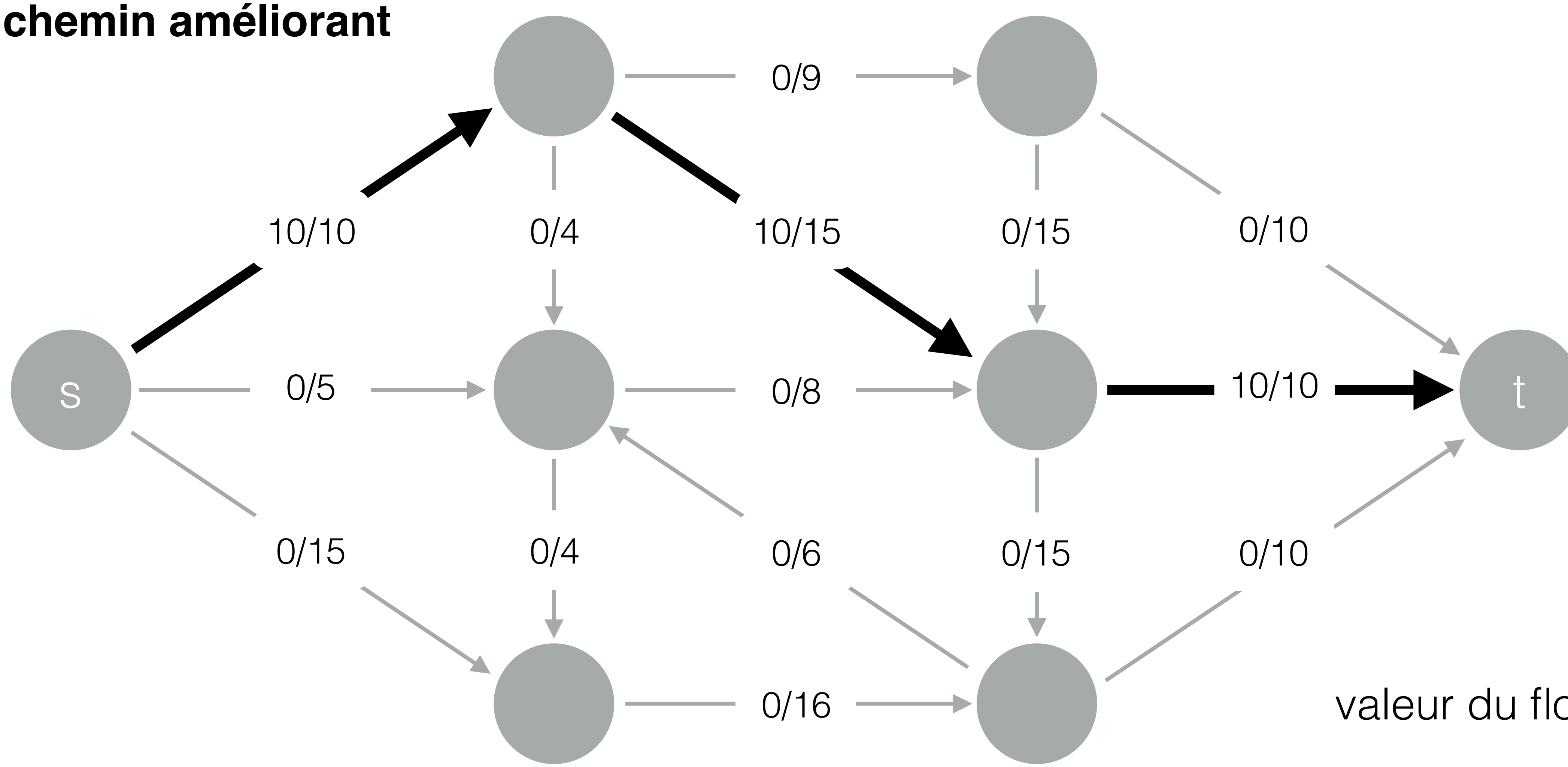
Chemin améliorant : on cherche un chemin (dans le graphe non orienté associé) de *s* à *t*

- qui augmente de *w* le flot des arcs empruntés en avant
- qui diminue de de *w* le flot des arcs empruntés en arrière

sans dépasser la capacité de l'arc

sans rendre le flot négatif sur cet arc

1er chemin améliorant



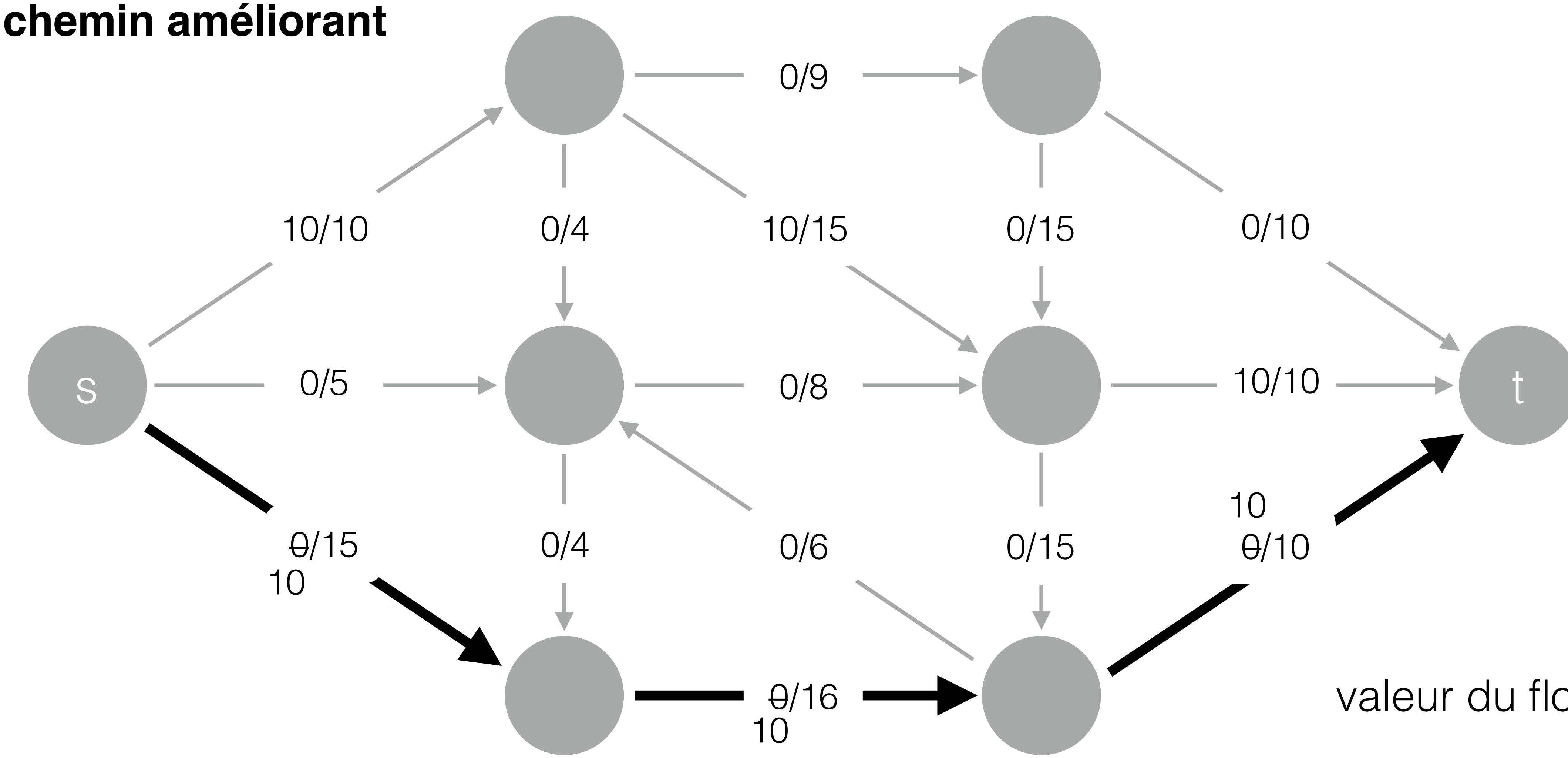
valeur du flot = 10

Algorithme de Ford-Fulkerson

Chemin améliorant : on cherche un chemin (dans le graphe non orienté associé) de *s* à *t*

- qui augmente de *w* le flot des arcs empruntés en avant
- qui diminue de de *w* le flot des arcs empruntés en arrière

2e chemin améliorant



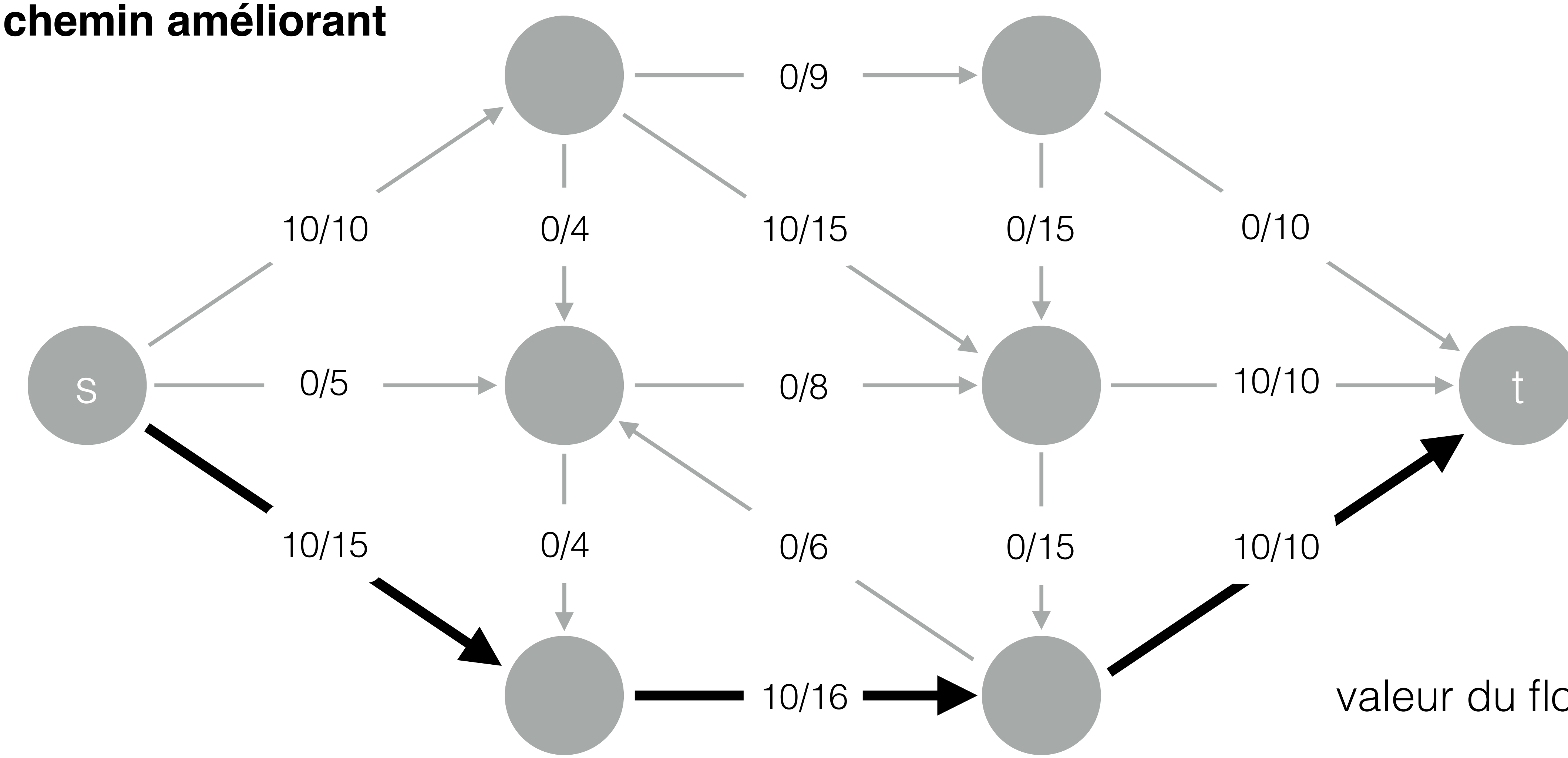
valeur du flot = 10+10

Algorithme de Ford-Fulkerson

Chemin améliorant : on cherche un chemin (dans le graphe non orienté associé) de *s* à *t*

- qui augmente de *w* le flot des arcs empruntés en avant
- qui diminue de de *w* le flot des arcs empruntés en arrière

2e chemin améliorant



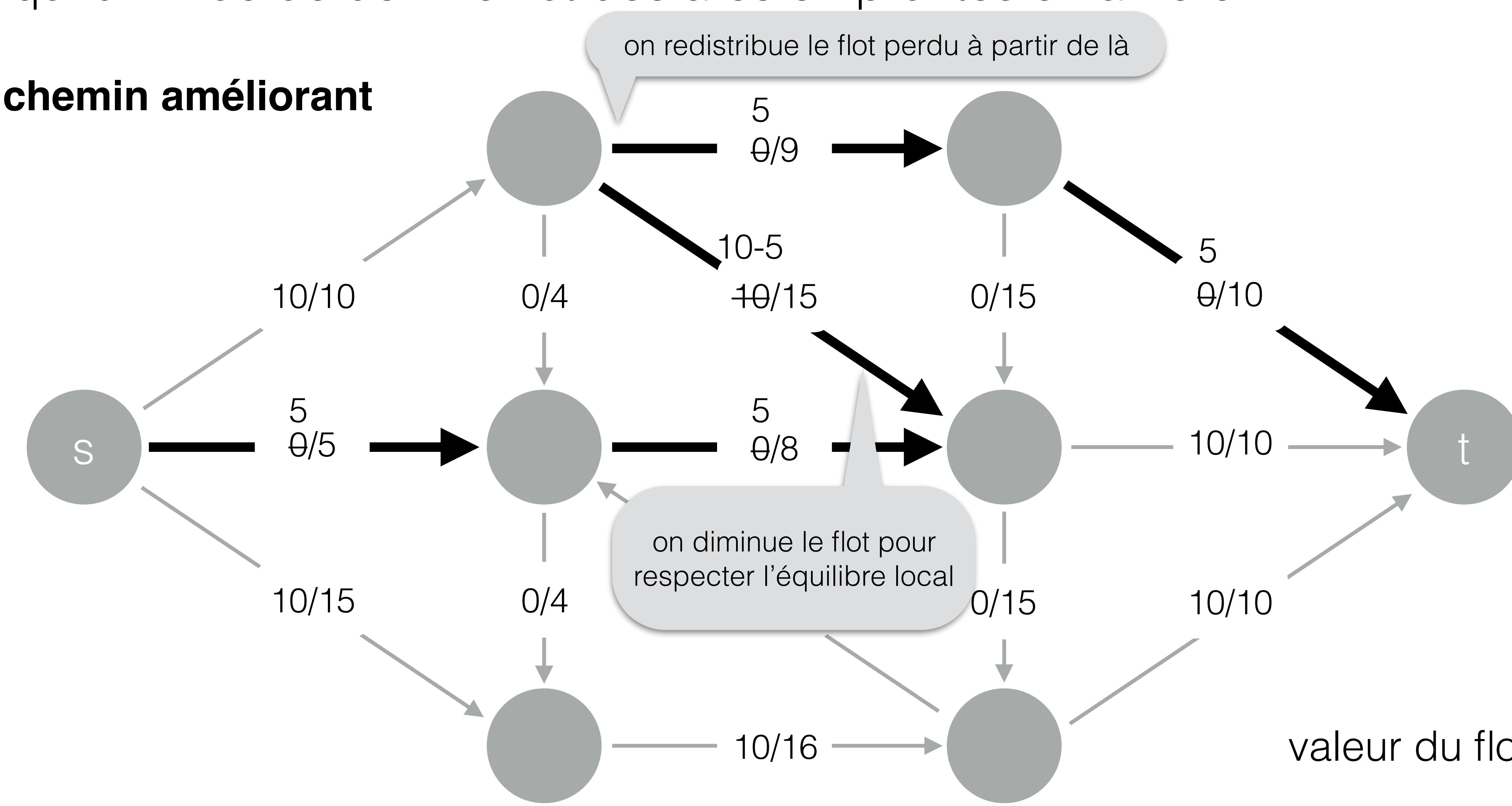
valeur du flot = 10+10

Algorithme de Ford-Fulkerson

Chemin améliorant : on cherche un chemin (dans le graphe non orienté associé) de *s* à *t*

- qui augmente de *w* le flot des arcs empruntés en avant
- qui diminue de de *w* le flot des arcs empruntés en arrière

3e chemin améliorant



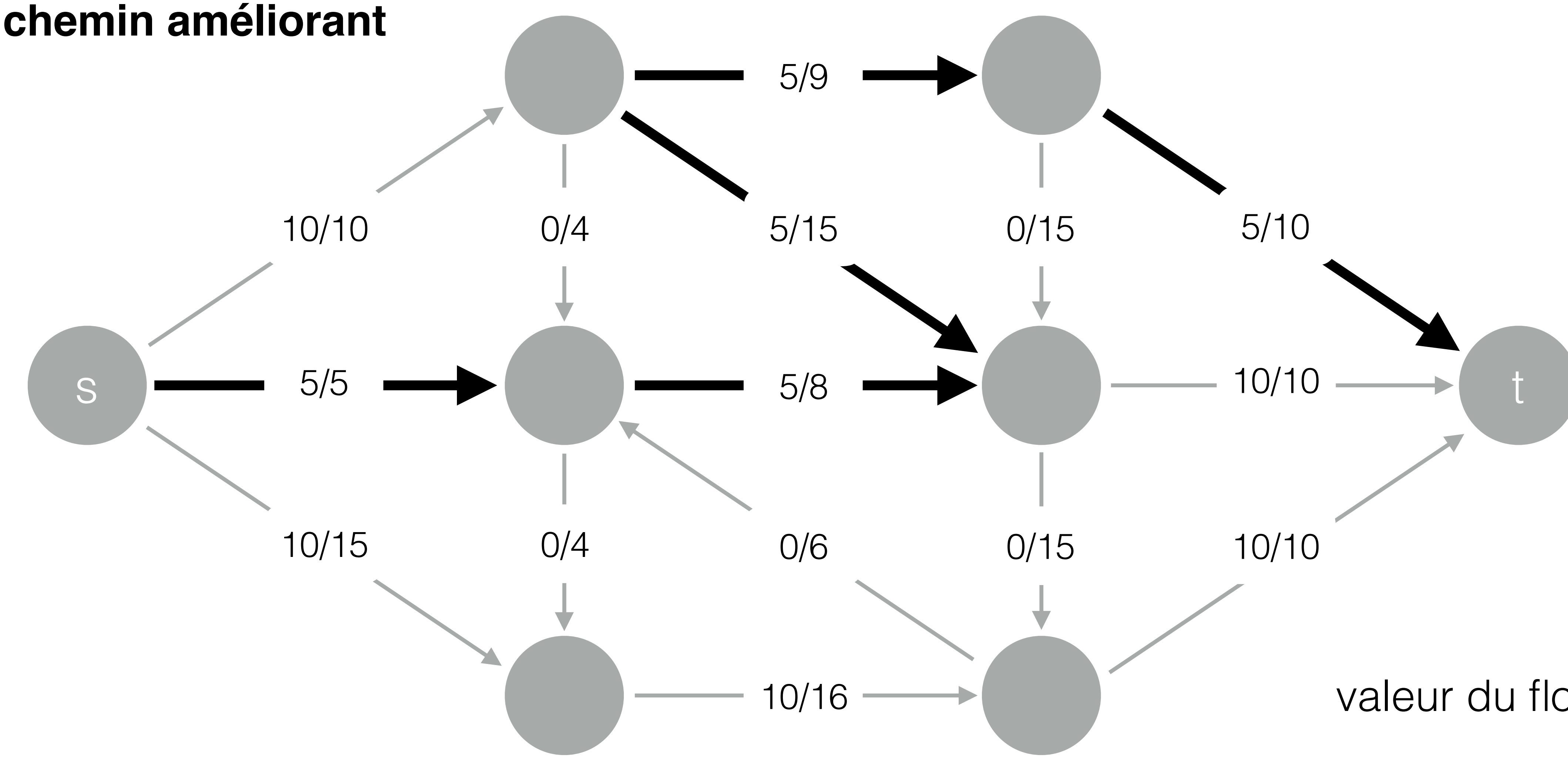
valeur du flot = 20+5

Algorithme de Ford-Fulkerson

Chemin améliorant : on cherche un chemin (dans le graphe non orienté associé) de *s* à *t*

- qui augmente de *w* le flot des arcs empruntés en avant
- qui diminue de de *w* le flot des arcs empruntés en arrière

3e chemin améliorant



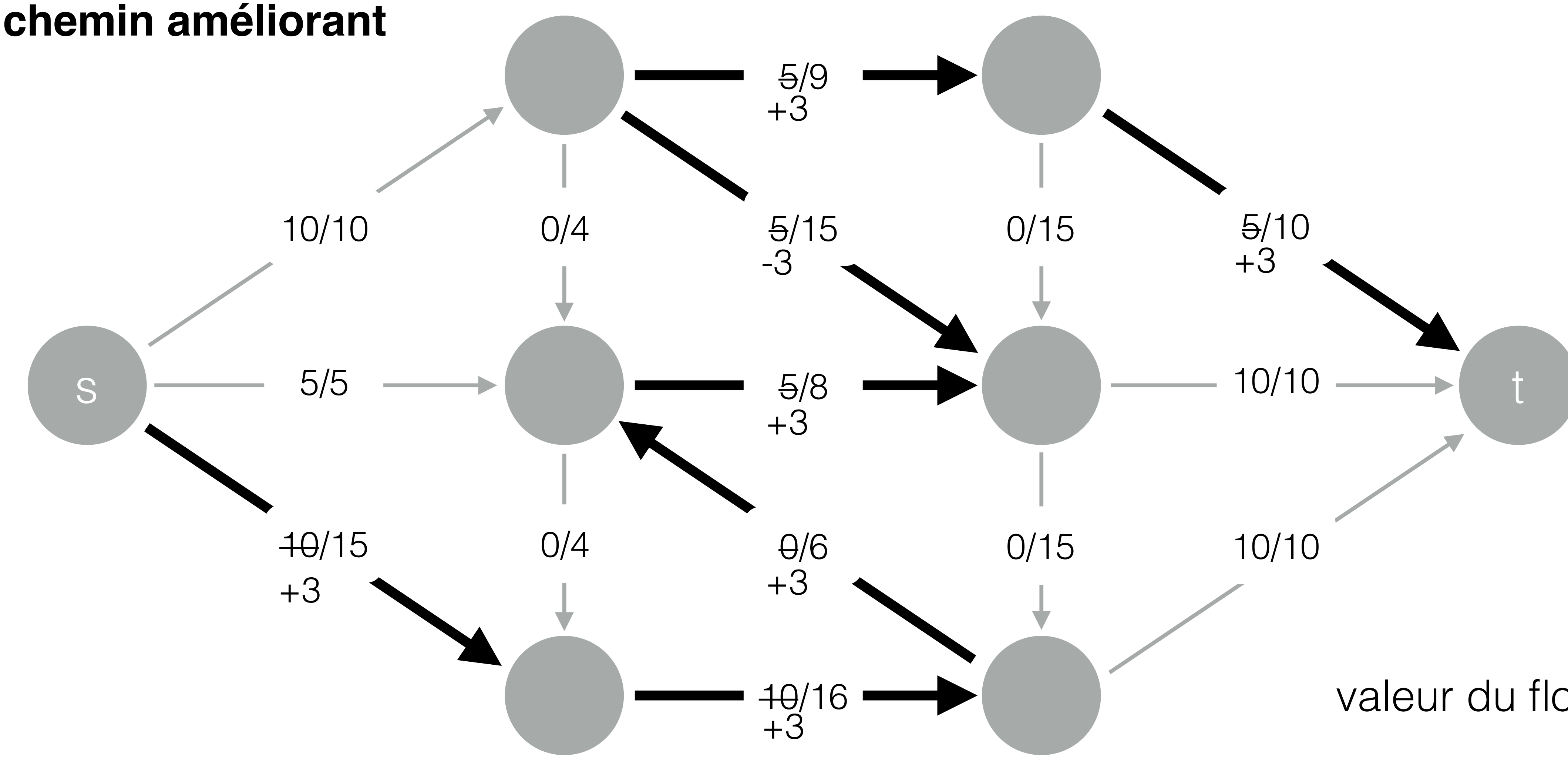
valeur du flot = 20+5

Algorithme de Ford-Fulkerson

Chemin améliorant : on cherche un chemin (dans le graphe non orienté associé) de *s* à *t*

- qui augmente de *w* le flot des arcs empruntés en avant
- qui diminue de de *w* le flot des arcs empruntés en arrière

4e chemin améliorant



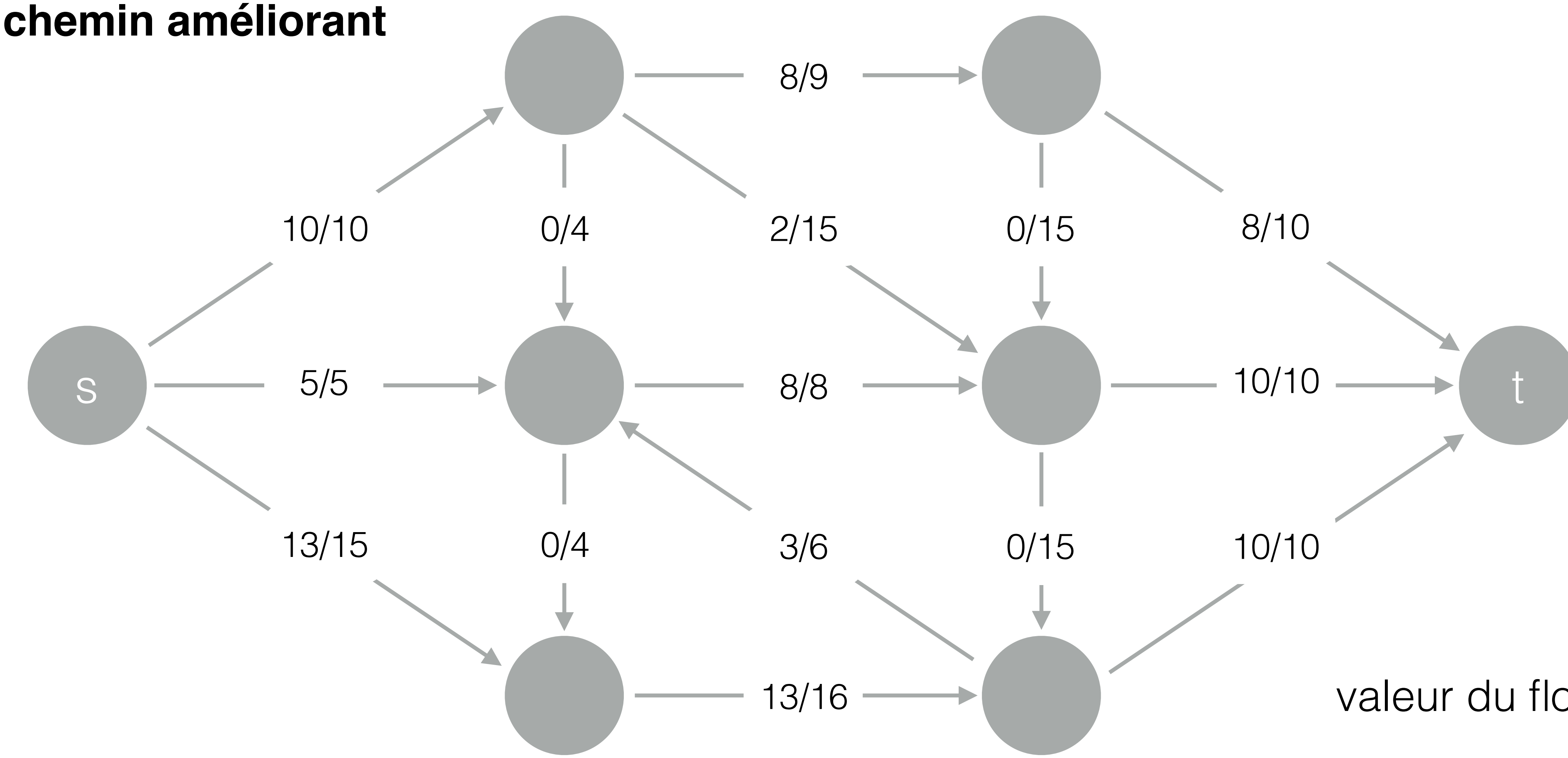
valeur du flot = 25+3

Algorithme de Ford-Fulkerson

Chemin améliorant : on cherche un chemin (dans le graphe non orienté associé) de *s* à *t*

- qui augmente de *w* le flot des arcs empruntés en avant
- qui diminue de de *w* le flot des arcs empruntés en arrière

4e chemin améliorant



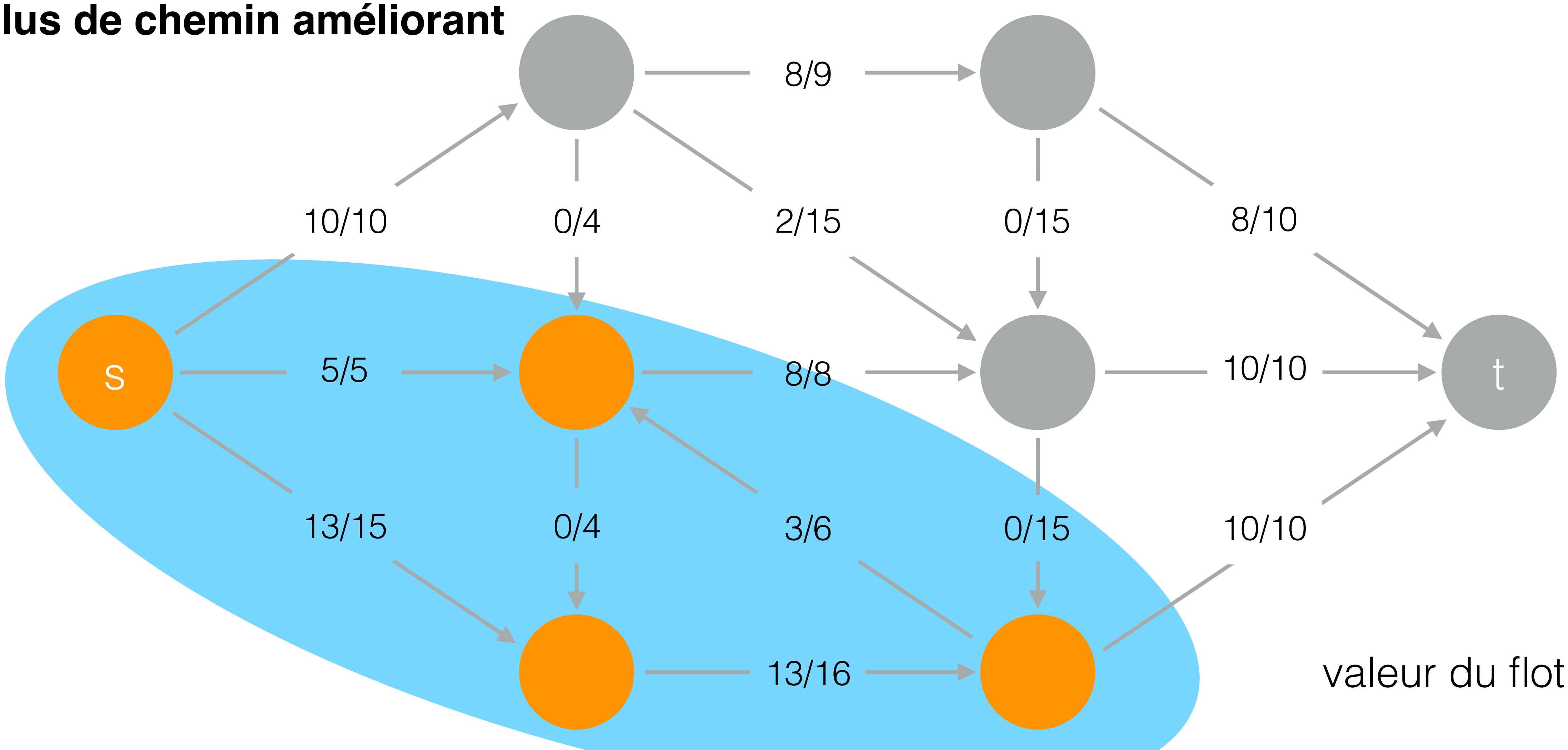
valeur du flot = 25+3

Algorithme de Ford-Fulkerson

Terminaison : tous les chemins de *s* à *t* (dans le graphe non orienté associé) sont bloqués

- soit sur un arc *e* emprunté en avant tel que *f(e)=c(e)*
- soit sur une arc *e* emprunté en arrière tel que *f(e)=0*

plus de chemin améliorant

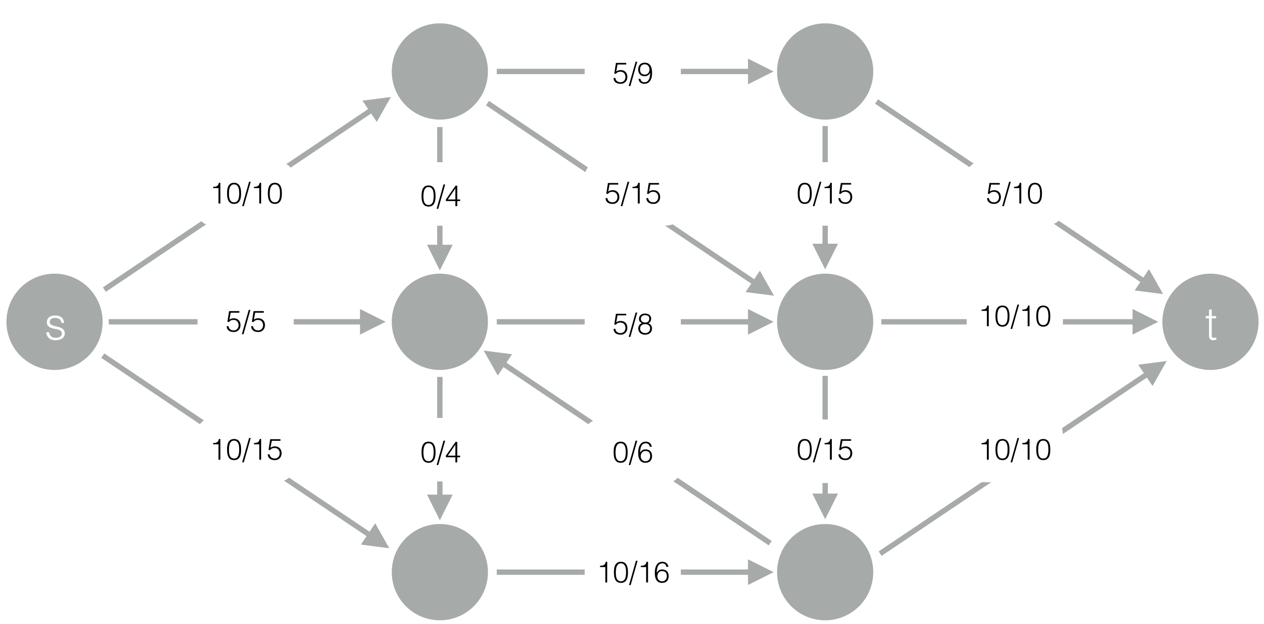


valeur du flot = 28

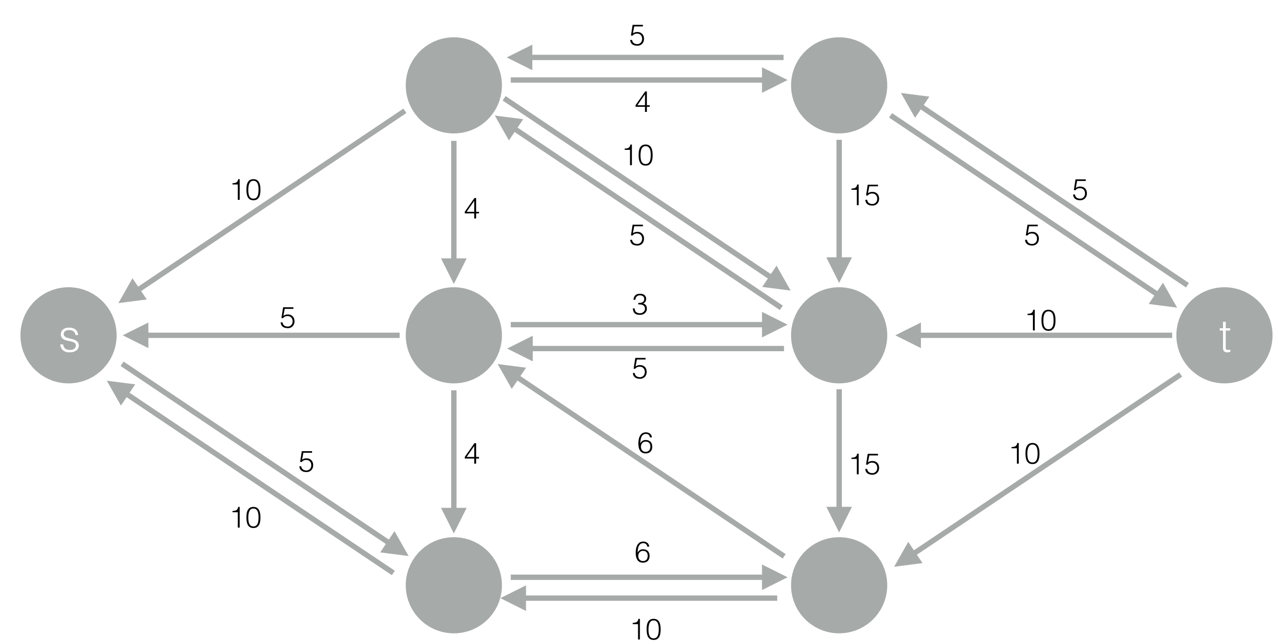
Algorithme de Ford-Fulkerson

Algorithme

1. Commence avec un flot nul
2. Tant qu'il existe un chemin améliorant
    1. Trouve un chemin améliorant (parcours du graphe orienté résiduel)
    2. Calcule le poid maximum *w* le long de ce chemin
    3. Augmente le flot avec *w* le long de ce chemin



Graphe de flot

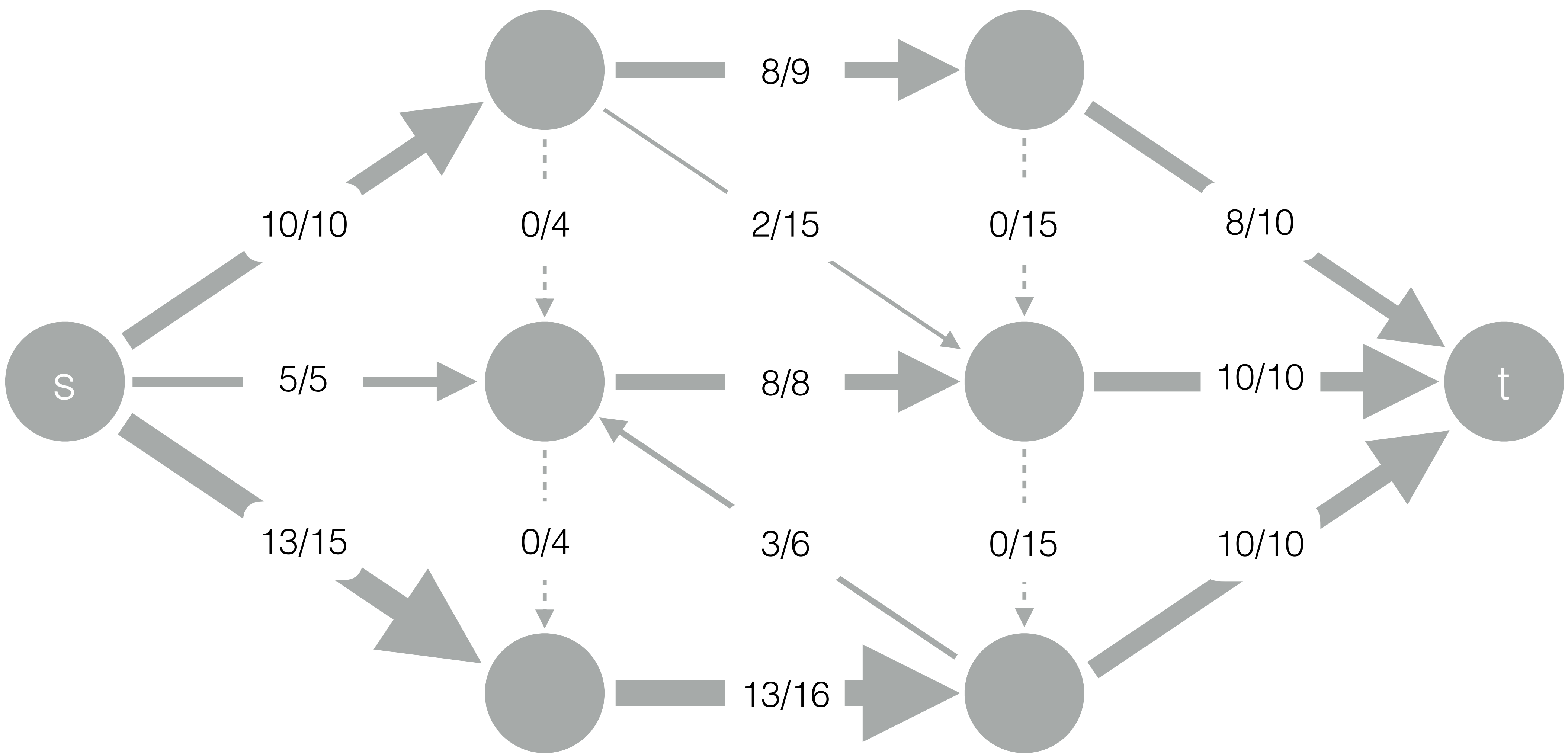


Graphe résiduel

Algorithme de Ford-Fulkerson

Questions

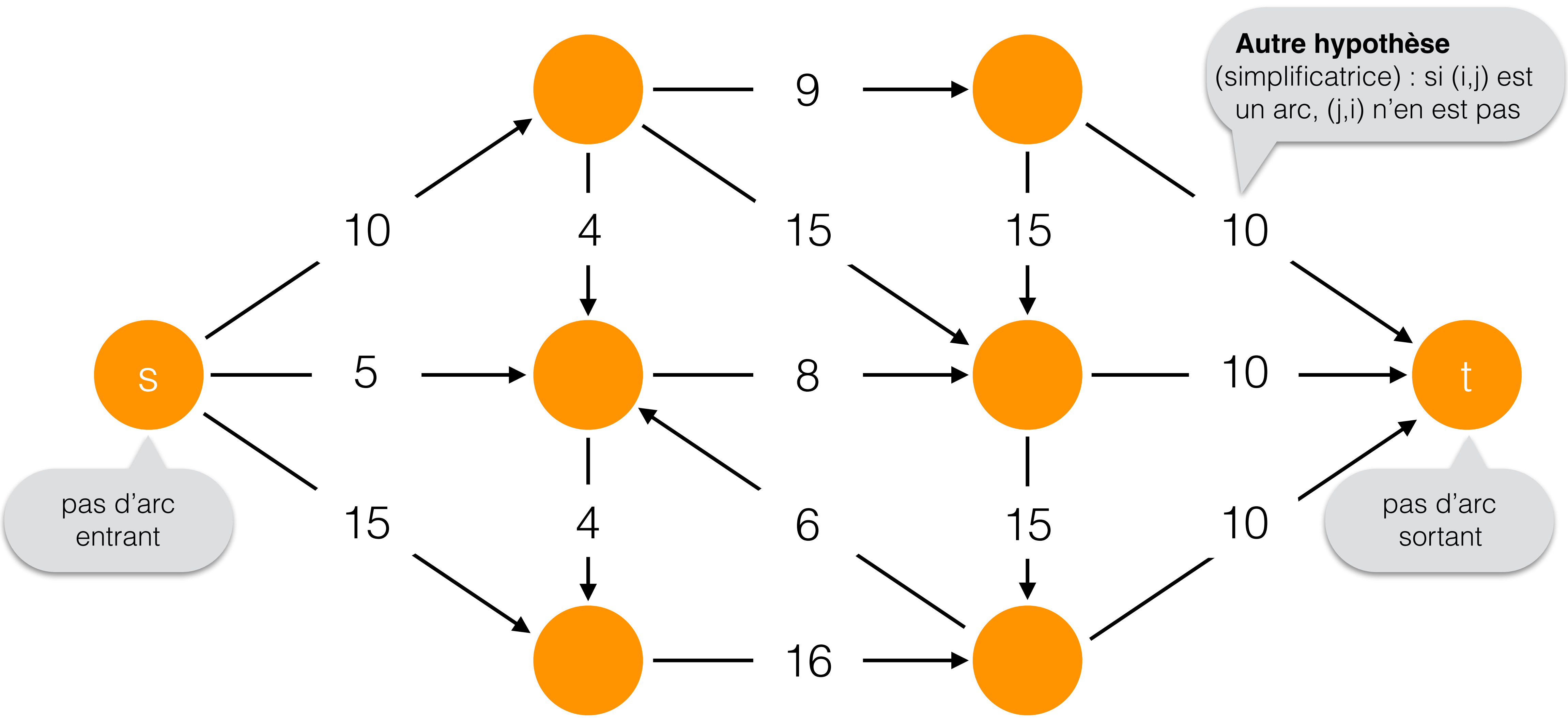
- Quand l'algorithme termine, est-ce qu'il calcule bien un flot maximum ?
- Est-ce que l'algorithme termine toujours ?
- Si oui, après combien de recherche de chemins augmentants ?



Le problème de la coupe minimum

Entrée

- un graphe pondéré (par une *capacité* notée *c*)
- poids positifs ou nuls
- un sommet *source* s et un sommet *cible* t

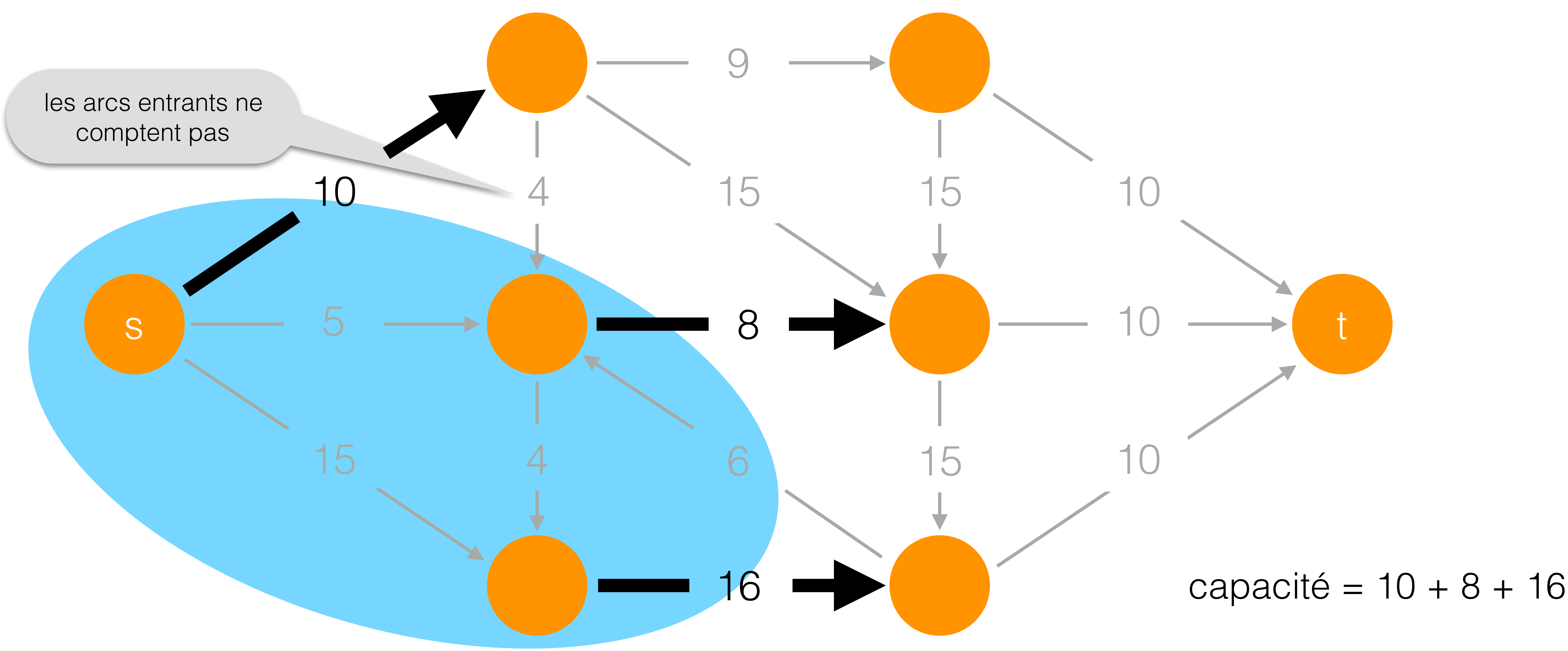


Le problème de la coupe minimum

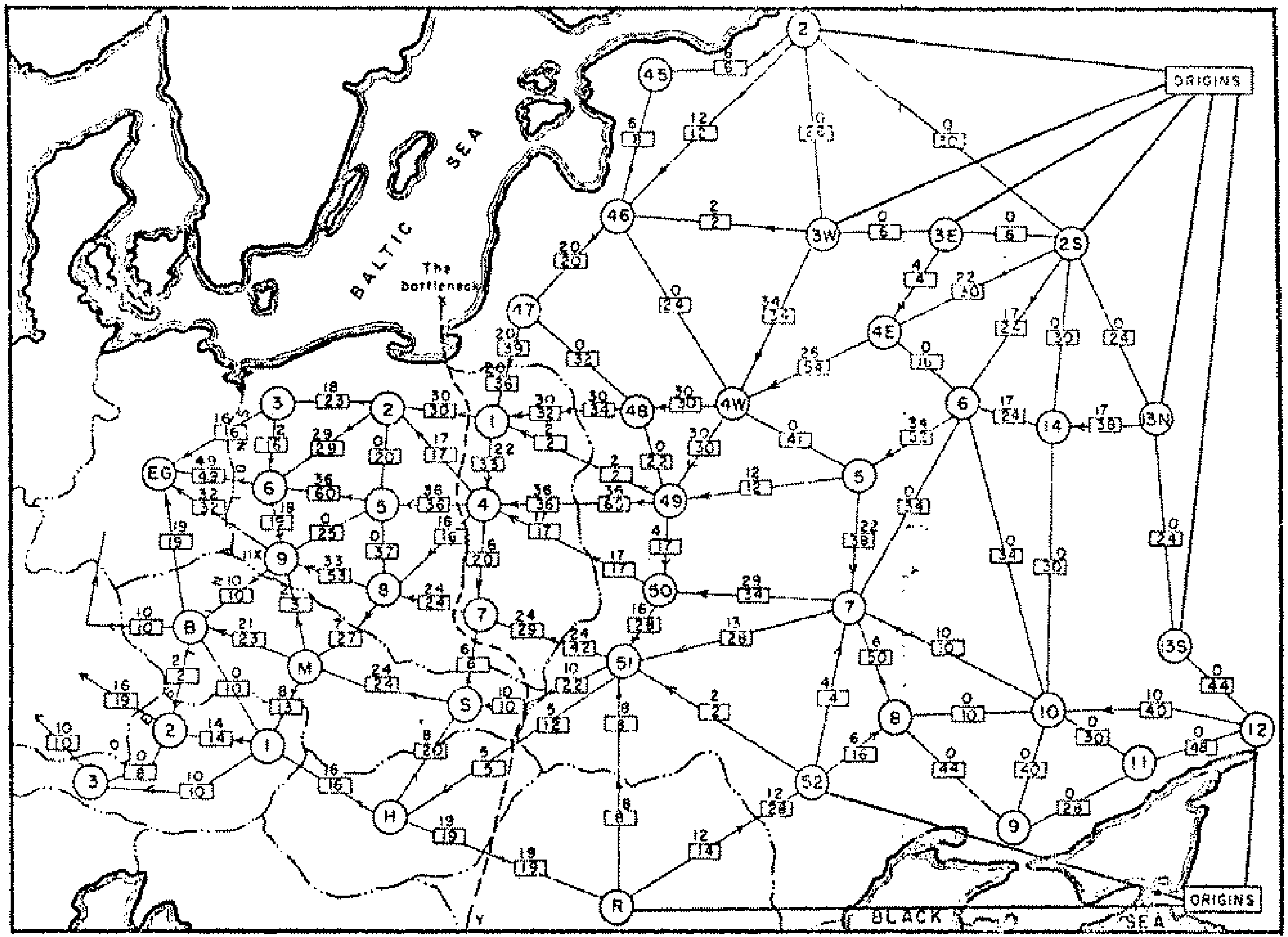
Définition. Une *coupure* est une une partition *(A,B)* de l'ensemble des sommets du graphe telle que *s* appartient à *A et t* appartient à *B.*

Définition. La capacité d'une coupure est la somme des capacités des arcs allant de *A* vers *B*.

Problème de la coupure minimum : trouver une coupure de capacité minimum.



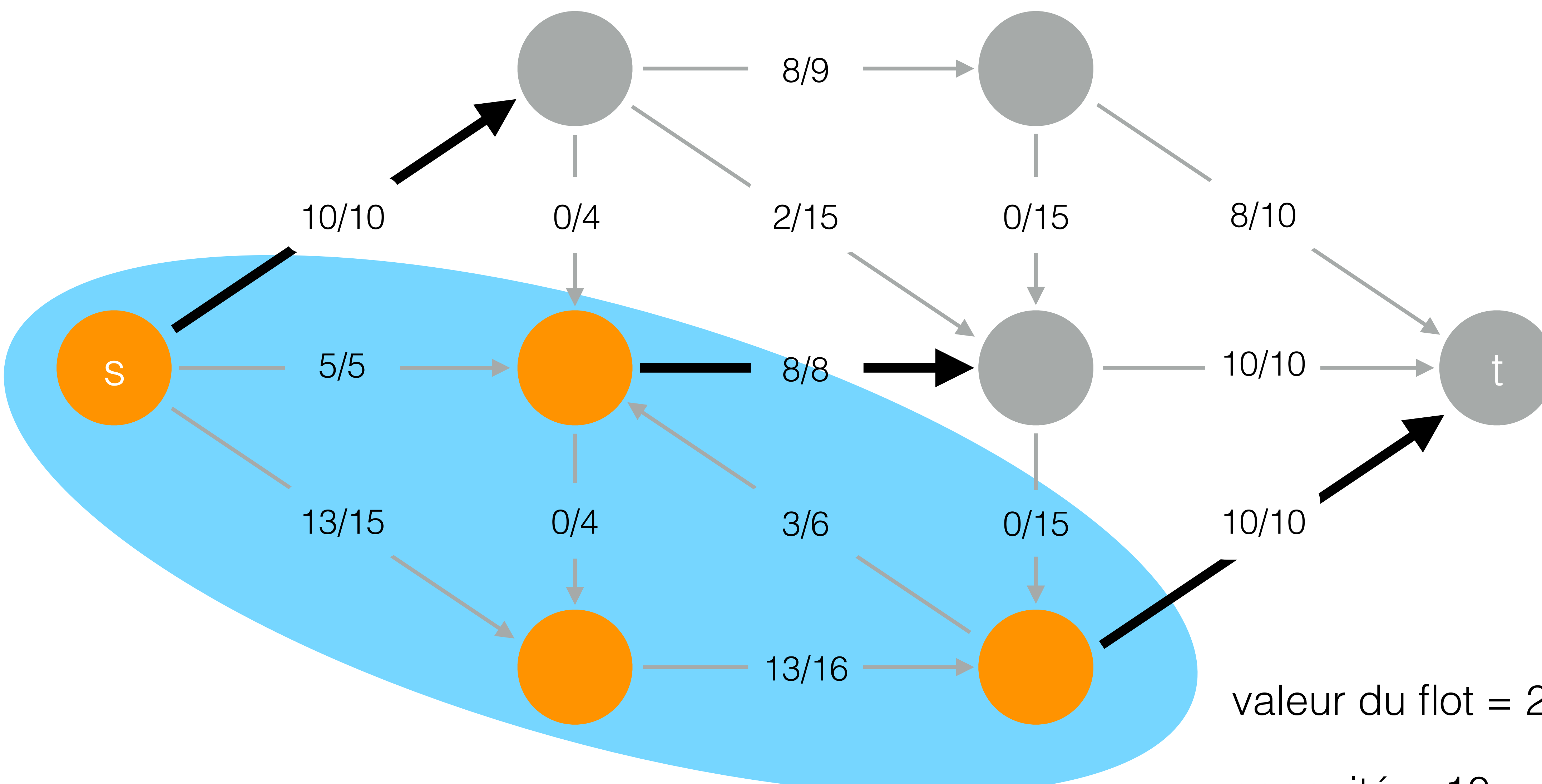
Deux problèmes historiques



On the history of the transportation and the maximum flow problem. Alexander Schrijver. http://homepages.cwi.nl/~lex/files/histtrpclean.pdf

Le théorème du *maxflow-mincut*

Théorème. La capacité de la coupe minimum est égale à la valeur du flot maximum.



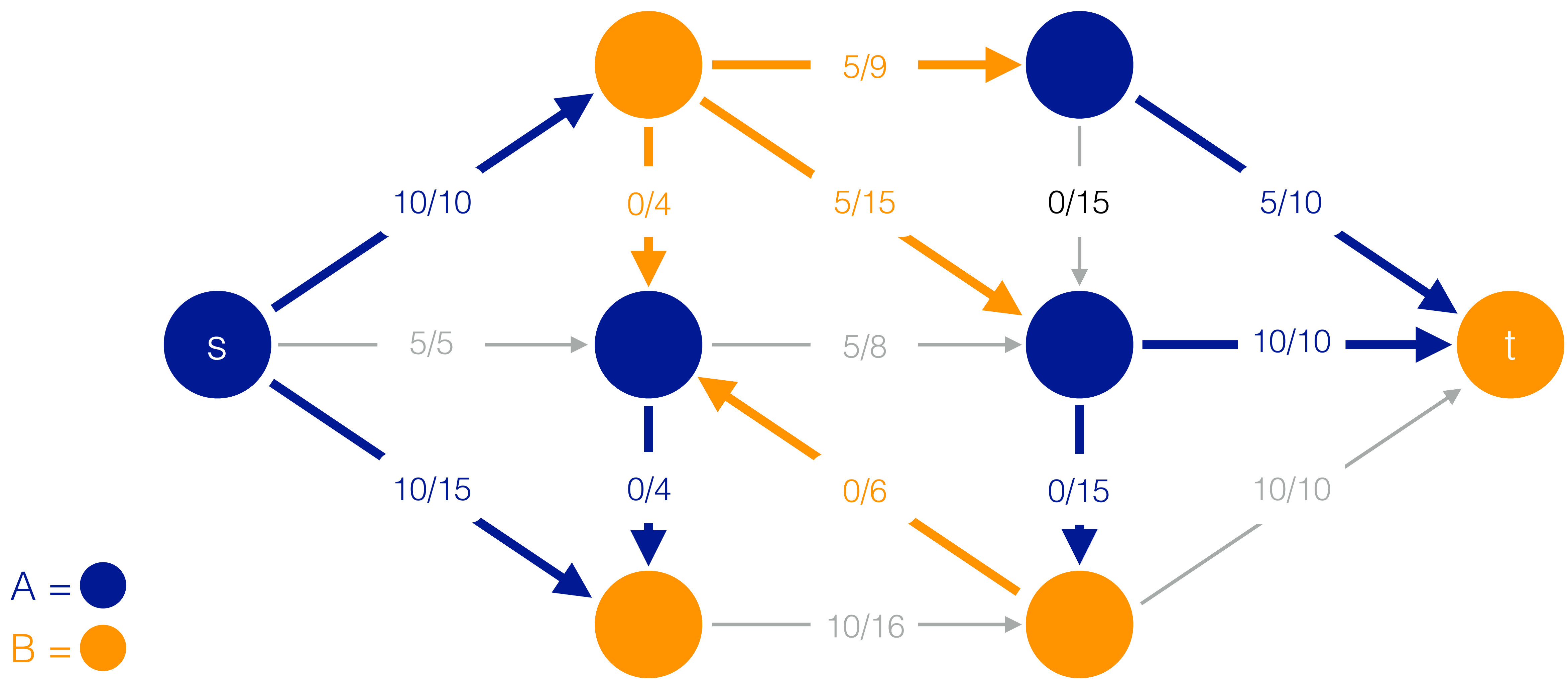
valeur du flot = 28

capacité = 10 + 8 + 10 = 28

Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

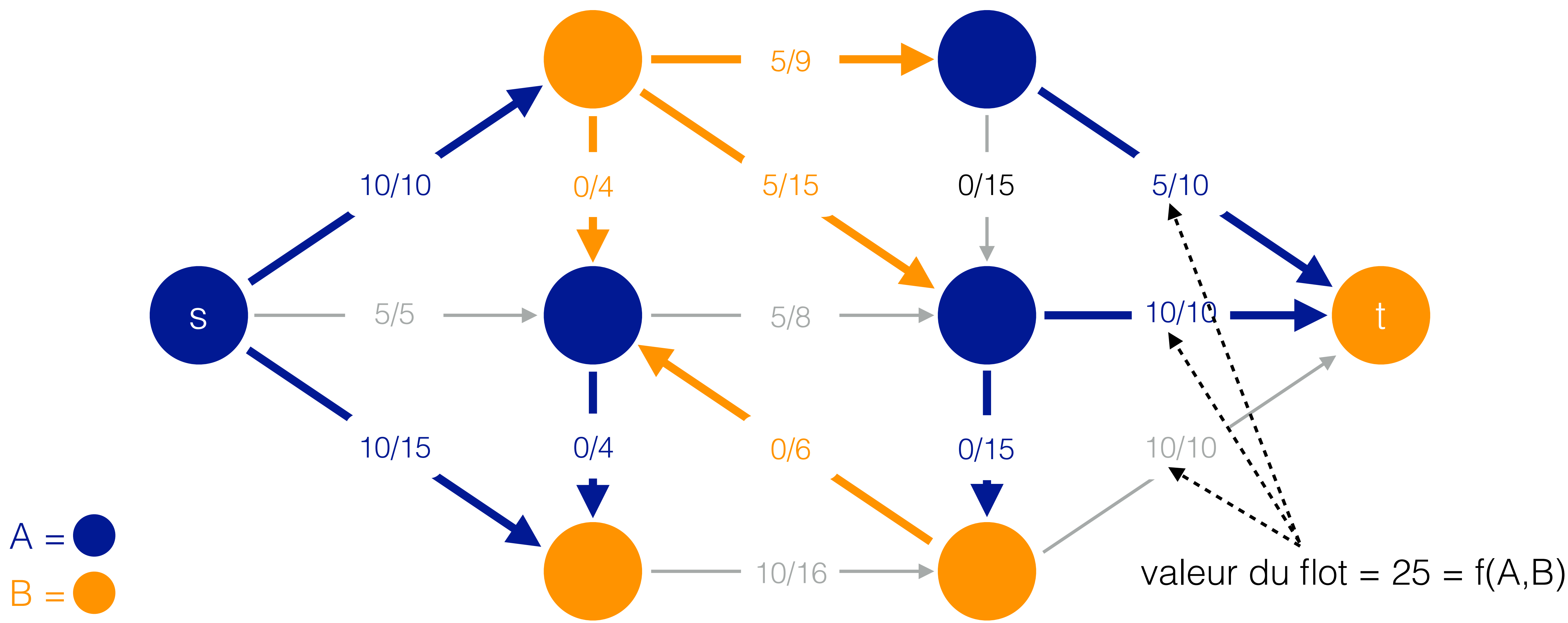
Définition. Soit *f* un flot et *(A,B)* une coupure. Le *flot net f(A,B)* est définie comme la somme des flots des arcs de *A* vers *B*, moins la somme des flots des arcs de *B* vers *A*.

Ici : (10 + 10 + 0 + 5 + 10) - (0 + 5 + 5 + 0) = 25



Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Le flot net *f(A,B)* est égal à la valeur du flot *f.*



Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Le flot net *f(A,B)* est égal à la valeur du flot *f.*

Preuve. Par récurrence sur la taille de *B*.

- Cas de base : *B = {t}.*
- Hérédité : supposons le résultat vrai pour *(A,B)* $[f(A,B) = |f|]$, fixons *y* appartenant à A et montrons le résultat pour la coupe (A-{y}, B+{y}).

$$f(A\backslash\{y\}, B \cup \{y\}) = \sum_{u \in A\backslash\{y\}, v \in B \cup \{y\}} c(u,v) - \sum_{u \in B \cup \{y\}, v \in A\backslash\{y\}} c(u,v)$$

$$f(A\backslash\{y\}, B\cup\{y\}) = \sum_{u\in A\backslash\{y\}, v\in B\cup\{y\}} c(u,v) - \sum_{u\in B\cup\{y\}, v\in A\backslash\{y\}} c(u,v)$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{u\in A\backslash\{y\}, v\in B\cup\{y\}} c(u,v) &= \sum_{u\in A, v\in B\cup\{y\}} c(u,v) - \sum_{v\in B\cup\{y\}} c(y,v) \\
&= \sum_{u\in A, v\in B} c(u,v) + \sum_{u\in A} c(u,y) - \sum_{v\in B} c(y,v) - c(y,y) \\
&= \sum_{u\in A, v\in B} c(u,v) + \sum_{u\in A} c(u,y) - \sum_{v\in B} c(y,v)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
f(A\backslash\{y\}, B\cup\{y\}) &= \left(\sum_{u\in A, v\in B} c(u,v) \sum_{u\in A} c(u,y) - \sum_{v\in B} c(y,v)\right) \\
&\quad - \left(\sum_{u\in B, v\in A} c(u,v) + \sum_{v\in A} c(y,v) - \sum_{u\in B} c(u,y)\right) \\
&= f(A,B) + \sum_{u\in A\cup B} c(u,y) - \sum_{v\in A\cup B} c(y,v) \\
&= f(A,B) + 0 \\
&= |f|
\end{aligned}$$

équilibre local
en *y*

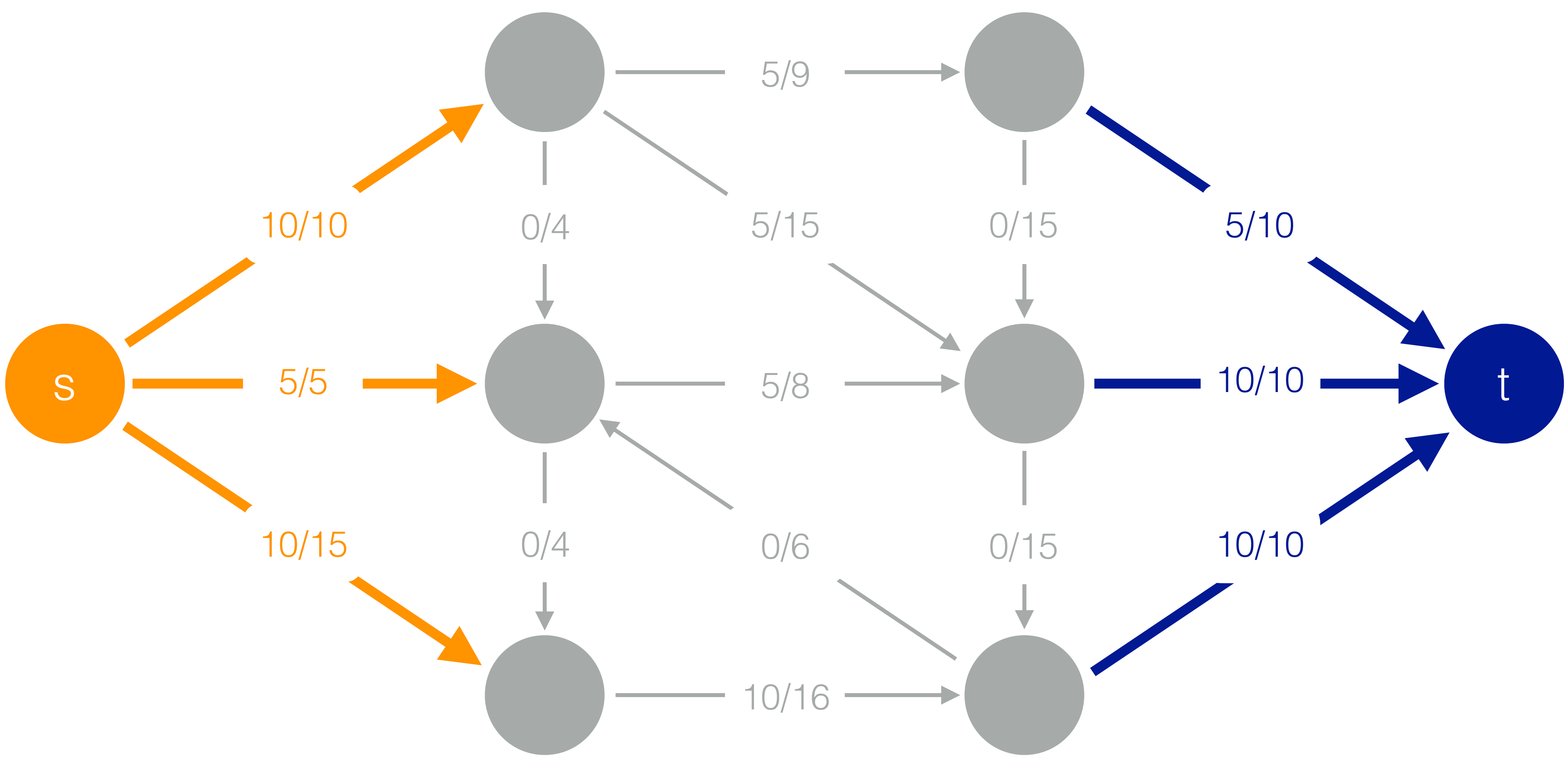
par hypothèse de
récurrence

Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Le flot net $f(A,B)$ est égal à la valeur du flot f.

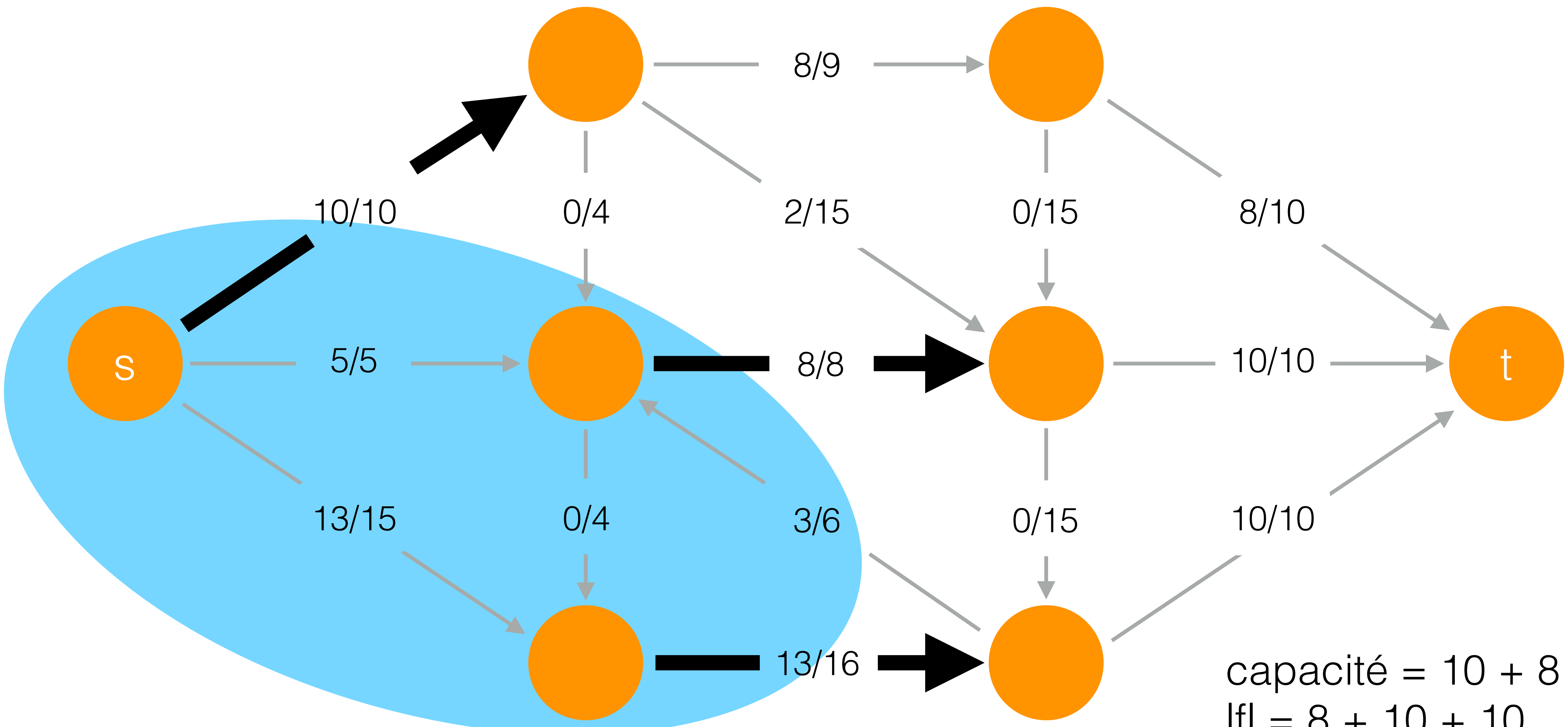
Corollaire. La somme des flots sortants du sommet s est égale à la somme des flots entrants dans t.

$$10 + 5 + 10 = 5 + 10 + 10$$



Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Pour tout flot *f* et toute coupure *(A,B)*, la valeur du flot *f* est inférieure ou égal à la capacité de la coupure



capacité = 10 + 8 + 16
|f| = 8 + 10 + 10
$24 \leq 28$

Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Pour tout flot *f* et toute coupure *(A,B)*, la valeur du flot *f* est inférieure ou égal à la capacité de la coupure.

Preuve.

$$|f| = \sum_{u \in A, v \in B} f(u,v) - \sum_{u \in B, v \in A} f(u,v) \leq \sum_{u \in A, v \in B} f(u,v) \leq \sum_{u \in A, v \in B} c(u,v) = cap(A,B)$$

le flot net est égal à la valeur du flot

$\forall e \in A, f(e) \geq 0$

$\forall e \in A, f(e) \leq c(e)$

capacité de la coupe

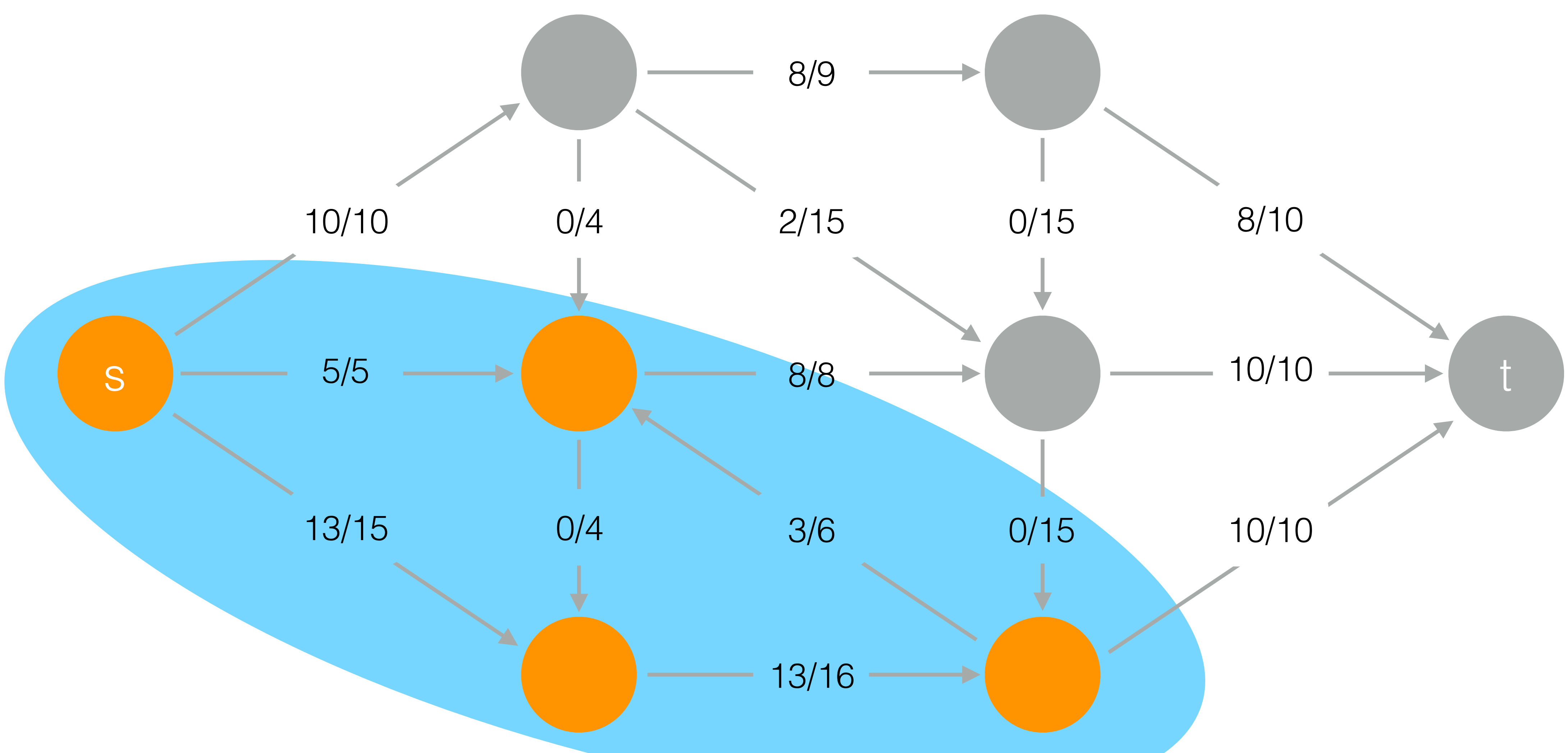
Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Soit *f* un flot. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une coupure dont la capacité est égal à la valeur du flot.

ii) Le flot *f* est maximal.

iii) Il n'existe pas de chemin améliorant par rapport à *f.*



Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Soit *f* un flot. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une coupure dont la capacité est égal à la valeur du flot.
ii) Le flot *f* est maximal.
iii) Il n'existe pas de chemin améliorant par rapport à *f.*

Preuve. [i) => ii)]

Soit *(A,B)* une coupure telle que $cap(A,B)=|f|$. Pour tout flot *f'*, sa valeur est inférieure à la capacité cap*(A,B)*. Donc $|f'|$ est inférieure à $|f|$.

Donc *f* est maximal.

Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Soit *f* un flot. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une coupure dont la capacité est égal à la valeur du flot.
ii) Le flot *f* est maximal.
iii) Il n'existe pas de chemin améliorant par rapport à *f.*

Preuve. [ii) => iii)]
Contraposée : si il existe un chemin améliorant, alors *f* n'est pas maximal puisque le chemin permet d'augmenter la valeur du flot.

Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Soit *f* un flot. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

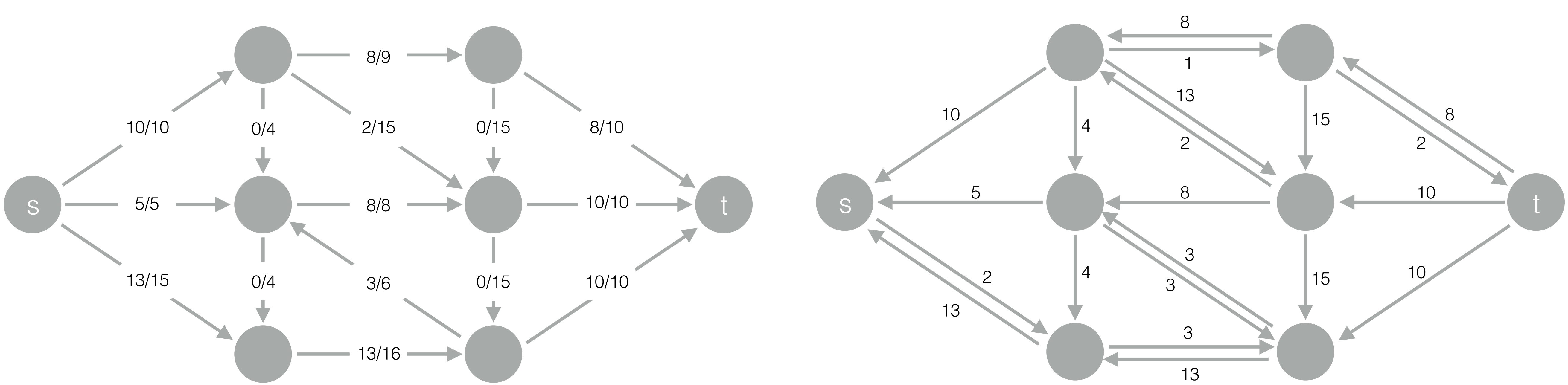
i) Il existe une coupure dont la capacité est égal à la valeur du flot.

ii) Le flot *f* est maximal.

iii) Il n'existe pas de chemin améliorant par rapport à *f.*

Preuve. [iii) => i)]

Supposons l'absence de chemins améliorants et exhibons une coupure dont la capacité soit égal à |f|.



Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Preuve. [iii) => i)]

Supposons l'absence de chemins améliorants et exhibons une coupure dont la capacité soit égal à |f|.

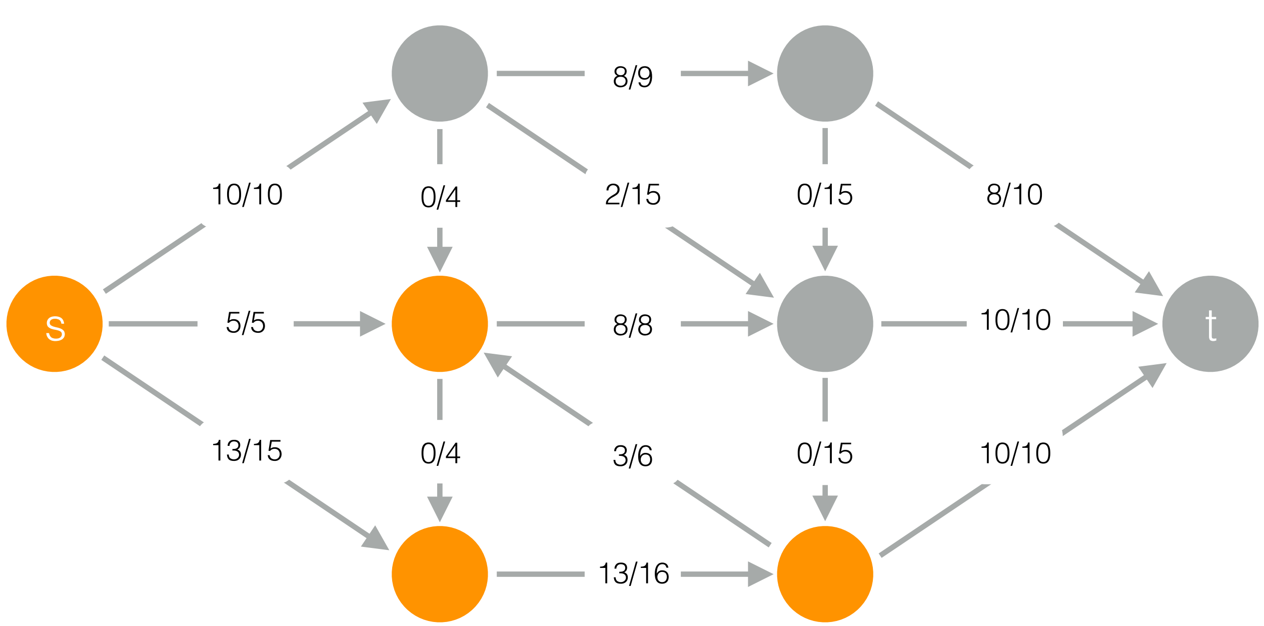
Soit *A* l'ensemble des sommets *u* accessibles depuis *s* dans le graphe résiduel (vis à vis de *f*). Soit *B* le complémentaire de *A*.

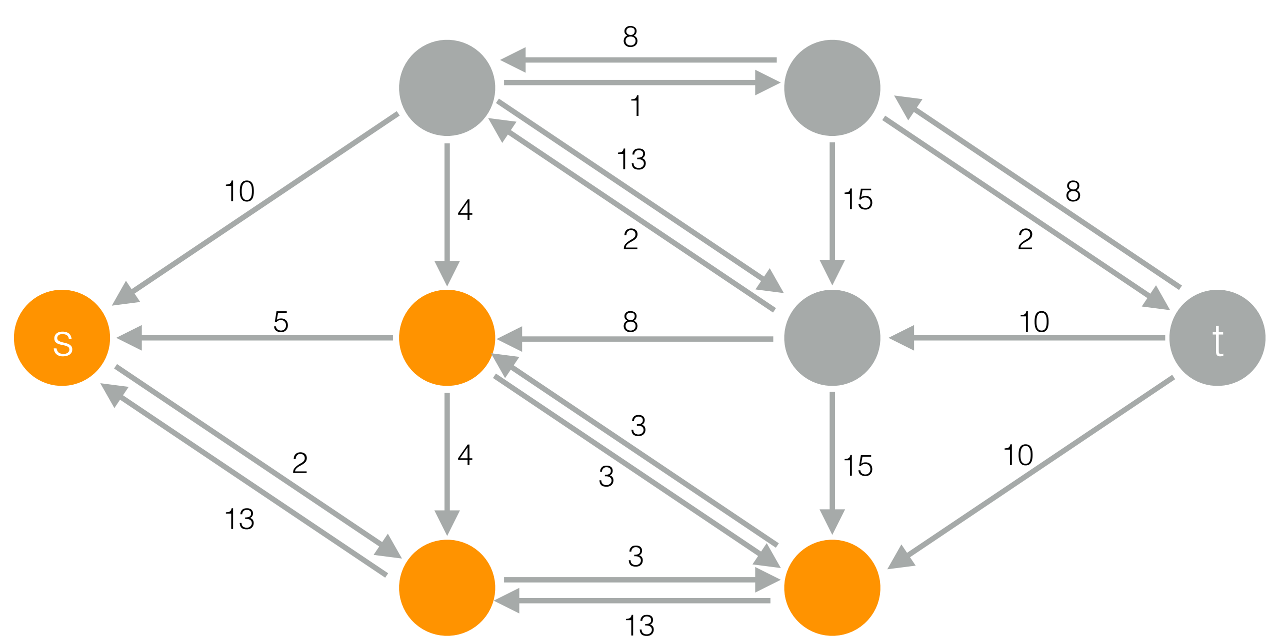
Par définition, *s* appartient à *A*.

Comme il n'y pas de chemin améliorant, *t* appartient à *B*.

Tous les arc allant de B à A ont un flot nul, donc

$$cap(A,B) = f(A,B) = |f|$$





Preuve du théorème du *maxflow-mincut*

Lemme. Soit *f* un flot. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une coupure dont la capacité est égal à la valeur du flot.

ii) Le flot *f* est maximal.

iii) Il n'existe pas de chemin améliorant par rapport à *f.*

Conséquences.

1. Puisque pour tout flot *f* et toute coupure *(A,B)*, la valeur du flot *f* est inférieure ou égal à la capacité de la coupure, i) est équivalent à l'existence d'une coupure minimale et le théorème *maxflow-mincut* est démontré.
2. Un flot est maximal s'il n'existe plus de chemin améliorant, donc l'algorithme de Ford-Fulkerson est correct (s'il termine).
3. On peut construire une coupe minimale avec l'ensemble des sommets *u* accessibles depuis *s* dans le graphe résiduel d'un flot maximal.

Terminaison de l'algorithme de Ford-Fulkerson

Hypothèse. La capacité de chaque arc est un nombre entier.

Lemme. Chaque flot intermediaire de l'algorithme de Ford-Fulkerson a une valeur entière.
Preuve. Par récurrence sur le nombre d'étapes de l'algorithme.

Lemme. Le nombre de chemin améliorant construit est inférieure à la valeur du flot maximal.
Preuve. La valeur du flot augmente d'au moins 1 à chaque chemin. Chaque flot f a une valeur bornée par la capacité de la coupe minimale.

On en déduit que l'algorithme termine toujours sous cette hypothèse et que le flot maximum est un nombre entier.

Complexité :

$$\mathcal{O}(A \cdot \mathrm{flow\_max})$$

une construction de chemin = un parcours à partir de s

au plus flow_max chemins construits